El operador impulso angular

Para las traslaciones, consideramos desplazamientos infinitesimales según cada eje, e introdujimos el impulso lineal $\boldsymbol{P}$ como el generador de traslaciones infinitesimales.

Para las rotaciones, consideramos rotaciones infinitesimales alrededor de cada eje, e introducimos el impulso angular $\boldsymbol{J}$ como el generador de rotaciones infinitesimales.

$$\begin{cases} D\,(\boldsymbol{i}, dr) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,dr\,P_x \\ D\,(\boldsymbol{j}, dr) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,dr\,P_y \\ D\,(\boldsymbol{k}, dr) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,dr\,P_z \end{cases} \qquad \begin{cases} U_R\,(\boldsymbol{i}, d\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,d\theta\,J_x \\ U_R\,(\boldsymbol{j}, d\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,d\theta\,J_y \\ U_R\,(\boldsymbol{k}, d\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,d\theta\,J_z \end{cases}$$

Los P son operadores hermíticos, la conmutación de las traslaciones $\Rightarrow [\,P_x, P_y\,] = 0$

Los J son operadores hermíticos, la no-conmutación de las rotaciones $\Rightarrow [\,J_x,\ J_y\,] \neq 0$

Representaciones del grupo de las rotaciones

Rotación infinitesimal en dirección arbitraria como producto de rotaciones según los ejes $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$:

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{u}, d\theta)\,\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A} + d\theta\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{A} + u_x\,d\theta\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{A} + u_y\,d\theta\,\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{A} + u_z\,d\theta\,\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A} \\ &= R(\boldsymbol{i}, u_x\,d\theta)\,R(\boldsymbol{j}, u_y\,d\theta)\,R(\boldsymbol{k}, u_z\,d\theta)\,\boldsymbol{A} \end{aligned}$$

Como los operadores $U_R(\boldsymbol{u}, d\theta)$ representan las rotaciones, deben satisfacer

$$\begin{aligned} U_R(\boldsymbol{u}, d\theta) &= U_R(\boldsymbol{i}, u_x\,d\theta)\,U_R(\boldsymbol{j}, u_y\,d\theta)\,U_R(\boldsymbol{k}, u_z\,d\theta) \\ &= (1 - \tfrac{i}{\hbar}\,d\theta\,u_x\,J_x)\,(1 - \tfrac{i}{\hbar}\,d\theta\,u_y\,J_y)\,(1 - \tfrac{i}{\hbar}\,d\theta\,u_z\,J_z) \\ &= 1 - \tfrac{i}{\hbar}\,d\theta\,(u_x\,J_x + u_y\,J_y + u_z\,J_z) \;=\; 1 - \tfrac{i}{\hbar}\,d\theta\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J} \end{aligned}$$

Al igual que como hicimos con el operador desplazamiento:

$$U_R(\boldsymbol{u}, d\theta) = 1 - \tfrac{i}{\hbar}\,d\theta\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{U_R(\boldsymbol{u}, \theta) = \exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\,\theta\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}\right)}$$

El operador rotación

Al igual que como hicimos con el operador desplazamiento:

$$U_R(\boldsymbol{u}, \theta + d\theta) = U_R(\boldsymbol{u}, d\theta)\, U_R(\boldsymbol{u}, \theta) = \left(1 - \tfrac{i}{\hbar}\, d\theta\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}\right) U_R(\boldsymbol{u}, \theta) = U_R(\boldsymbol{u}, \theta) - \tfrac{i}{\hbar}\, d\theta\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}\, U_R(\boldsymbol{u}, \theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}\, U_R(\boldsymbol{u}, \theta)}{d\theta} = \lim_{d\theta \to 0} \frac{U_R(\boldsymbol{u}, \theta + d\theta) - U_R(\boldsymbol{u}, \theta)}{d\theta} = -\tfrac{i}{\hbar}\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}\, U_R(\boldsymbol{u}, \theta)$$

$$\boxed{U_R(\boldsymbol{u}, \theta) = \exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\, \theta\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}\right)}$$

Representaciones del grupo de las rotaciones

El grupo de las traslaciones es conmutativo,

$$D_{\boldsymbol{i}}\, D_{\boldsymbol{j}} = D_{\boldsymbol{j}}\, D_{\boldsymbol{i}} \quad \Rightarrow \quad [P_i, P_j] = 0$$

pero el de las rotaciones no:

$$R(\boldsymbol{i}, d\alpha)\, R(\boldsymbol{j}, d\beta) \neq R(\boldsymbol{j}, d\beta)\, R(\boldsymbol{i}, d\alpha)$$

Calculemos el conmutador a segundo orden en $d\alpha$ y $d\beta$:

$$\begin{aligned}
R(\boldsymbol{i}, d\alpha)\, R(\boldsymbol{j}, d\beta)\, \boldsymbol{A} &= R(\boldsymbol{i}, d\alpha)\, (\boldsymbol{A} + d\beta\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{A}) \\
&= \big(\boldsymbol{A} + d\beta\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{A}\big) + d\alpha\, \boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{A} + d\beta\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{A} + d\beta\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{A} \;\; + d\alpha\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{A} + d\alpha\, d\beta\;\, \boldsymbol{i} \times \big(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{A}\big) \\
R(\boldsymbol{j}, d\beta)\, R(\boldsymbol{i}, d\alpha)\, \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A} + d\alpha\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{A} \;\; + d\beta\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{A} + d\beta\, d\alpha\;\, \boldsymbol{j} \times \big(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{A}\big)
\end{aligned}$$

$$\big[R(\boldsymbol{i}, d\alpha), R(\boldsymbol{j}, d\beta)\big]\, \boldsymbol{A} = d\alpha\, d\beta\, \big[\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{j} \times (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{A})\big] = d\alpha\, d\beta\, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}$$

$$\boxed{\big[R(\boldsymbol{i}, d\alpha), R(\boldsymbol{j}, d\beta)\big] = R\,(\boldsymbol{k}, d\alpha\, d\beta) - 1}$$

Representaciones del grupo de las rotaciones

Los operadores $U_R(\boldsymbol{u},\theta)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\theta\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}\right)$ que representan rotaciones deben verificar entonces :

$$\boxed{\left[U_R(\boldsymbol{i},d\alpha),U_R(\boldsymbol{j},d\beta)\right]=U_R(\boldsymbol{k},d\alpha\,d\beta)-1}$$

$$\begin{cases} U_R(\boldsymbol{i},d\alpha)\,U_R(\boldsymbol{j},d\beta)=\left(1-\frac{i}{\hbar}\,d\alpha\,J_x\right)\left(1-\frac{i}{\hbar}\,d\beta\,J_y\right)=1-\frac{i}{\hbar}\,d\alpha\,J_x-\frac{i}{\hbar}\,d\beta\,J_y-\frac{1}{\hbar^2}\,d\alpha\,d\beta\,J_xJ_y \\ U_R(\boldsymbol{j},d\beta)\,U_R(\boldsymbol{i},d\alpha)=\left(1-\frac{i}{\hbar}\,d\beta\,J_y\right)\left(1-\frac{i}{\hbar}\,d\alpha\,J_x\right)=1-\frac{i}{\hbar}\,d\beta\,J_y-\frac{i}{\hbar}\,d\alpha\,J_x-\frac{1}{\hbar^2}\,d\beta\,d\alpha\,J_yJ_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[U_R(\boldsymbol{i},d\alpha),U_R(\boldsymbol{j},d\beta)\right] = -\frac{1}{\hbar^2}\,d\alpha\,d\beta\,[J_x,J_y] \\ U_R(\boldsymbol{k},d\alpha,d\beta)-1 = -\frac{i}{\hbar}\,d\alpha\,d\beta\,J_z \end{cases}$$

$$\left[U_R(\boldsymbol{i},d\alpha),U_R(\boldsymbol{j},d\beta)\right]=U_R\left(\boldsymbol{k},d\alpha\,d\beta\right)-1 \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\left[J_x,J_y\right]=i\hbar\,J_z}$$

El álgebra de Lie del grupo de Lie

La fórmula

$$U_R(\boldsymbol{u}, \theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\theta\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}\right)$$

es un mapeo entre el espacio vectorial de operadores hermíticos cuya base es $\{J_x,\ J_y,\ J_z\}$, y el grupo de operadores unitarios. Ambos son de dimensión 3.

El producto en el grupo determina el conmutador en el espacio: $\left[\,J_i, J_j\,\right] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,J_k$

El espacio vectorial es cerrado ante conmutaciones $\quad\Rightarrow\quad$ es un álgebra de Lie.

La inversa tambien es cierta, el conmutador determina el producto:

$$\exp(A)\,\exp(B) \;=\; \exp\left(A + B + \frac{1}{2}\,[A, B\,] + \frac{1}{12}\left\{\big[A, [A, B\,]\big] + \big[B, [B, A]\big]\right\} + \cdots\right)$$

Se dice así que $\left[\,J_i, J_j\,\right] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,J_k$ es el álgebra de Lie del grupo de las rotaciones.

Autovalores y autoestados del impulso angular

La relación de conmutación $\left[J_i,\, J_j \right] = i\hbar\, \epsilon_{ijk}\, J_k$ determina los posibles autovalores y autoestados del impulso angular.

Definimos : $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$

que satisface : $[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$

y buscamos autoestados de J^2 y J_z :

$$\boxed{\begin{aligned} J^2\, |a, b\rangle &= a\hbar^2\, |a, b\rangle \\ J_z\, |a, b\rangle &= b\hbar\, |a, b\rangle \end{aligned}} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

Definimos operadores de subida y bajada :

$$\begin{cases} J_+ = J_x + i\, J_y \\ J_- = J_x - i\, J_y \end{cases} \qquad [\, J^2,\, J_\pm \,] = 0$$

que satisfacen :

$$\begin{cases} [\, J_z\, ,\, J_+ \,] = \hbar\, J_+ \\ [\, J_z\, ,\, J_- \,] = -\hbar\, J_- \end{cases} \qquad \begin{cases} J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar\, J_z \\ J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar\, J_z \end{cases}$$

Autovalores y autoestados del impulso angular

Los operadores J_+ y J_- se llaman de subida y bajada pues satisfacen :

$$\begin{cases} J_z \left[J_\pm \left| a, b \right\rangle \right] = (b \pm 1)\hbar \left[J_\pm \left| a, b \right\rangle \right] \\ J^2 \left[J_\pm \left| a, b \right\rangle \right] = \quad a\, \hbar^2 \quad \left[J_\pm \left| a, b \right\rangle \right] \end{cases}$$

lo que equivale a decir :

$$\begin{cases} J_+ \left| a, b \right\rangle = \alpha \left| a, b{+}1 \right\rangle \\ J_- \left| a, b \right\rangle = \beta \left| a, b\,\text{-}1 \right\rangle \end{cases}$$

Los factores α y β salen por normalización de la base $\{ |a, b\rangle \}$:

$$\alpha \left| a, b{+}1 \right\rangle = J_+ \left| a, b \right\rangle$$

$$|\alpha|^2 \left\langle a, b{+}1 | a, b{+}1 \right\rangle = \left\langle a, b \right| J_- J_+ \left| a, b \right\rangle$$

$$|\alpha|^2 = \left\langle a, b \right| (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) \left| a, b \right\rangle = (a - b^2 - b)\, \hbar^2$$

$$\alpha = \sqrt{a - b^2 - b}\; \hbar$$

Análogamente :

$$\beta = \sqrt{a - b^2 + b}\; \hbar$$

Autovalores y autoestados del impulso angular

$$\begin{cases} J_+ \, |a,b\rangle = \sqrt{a - b^2 - b} \;\; \hbar \, |a, b{+}1\rangle \\ J_- \, |a,b\rangle = \sqrt{a - b^2 + b} \;\; \hbar \, |a, b\,{-}1\rangle \end{cases}$$

① $a \geq b^2$:

$$a - b^2 = \langle a,b|(J^2 - J_z^2)|a,b\rangle = \langle a,b|\, J_x^2 \, |a,b\rangle + \langle a,b|\, J_y^2 \, |a,b\rangle = \| J_x \, |a,b\rangle \|^2 + \| J_y \, |a,b\rangle \|^2 \;\geq\; 0$$

② Como J_+ sube b sin cambiar a, tiene que haber un $b_{\rm max}$ que $J_+ \, |a, b_{\rm max}\rangle = 0$

③ Como J_- baja b sin cambiar a, tiene que haber un $b_{\rm min}$ que $J_- \, |a, b_{\rm min}\rangle = 0$

④ Aplicando J_- repetidas veces, se debe ir de $|a, b_{\rm max}\rangle$ a $|a, b_{\rm min}\rangle$: $b_{\rm min} = b_{\rm max} - n$

② y ③ $\Rightarrow \begin{cases} a - b_{\rm max}^2 - b_{\rm max} = 0 \\ a - b_{\rm min}^2 + b_{\rm min} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b_{\rm max}\,(b_{\rm max}+1) \\ a = b_{\rm min}\,(b_{\rm min}-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{\rm min} = -b_{\rm max} \\ \cancel{b_{\rm min} = b_{\rm max}+1} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{lll} ④ & \Rightarrow & b_{\rm max} = b_{\rm min} + n \\ ② \text{ y } ③ & \Rightarrow & b_{\rm max} = -b_{\rm min} \end{array}\right\} \quad \boxed{b_{\rm max} = \frac{n}{2}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Autovalores y autoestados del impulso angular

Recapitulando :
$$\begin{cases} J^2\,|a,b\rangle = a\hbar^2\,|a,b\rangle \\ J_z\,|a,b\rangle = b\hbar\,|a,b\rangle \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = b_{\max}\,(b_{\max}+1) \\ b_{\max} = \dfrac{n}{2} \\ b_{\min} = -b_{\max} \end{cases}$$

Pasamos de la notación $\{|a,b\rangle\}$ a la $\{|j,m\rangle\}$:

$$\begin{cases} j \equiv \dfrac{n}{2} : \quad a = b_{\max}\,(b_{\max}+1) \quad \Rightarrow \quad a = j\,(j+1) \\ m \equiv b : \quad b_{\min} \leq b \leq b_{\max} \quad \Rightarrow \quad -j \leq m \leq j \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} J^2\,|j,m\rangle &= j\,(j+1)\,\hbar^2\,|j,m\rangle \\ J_z\,|j,m\rangle &= m\,\hbar\,|j,m\rangle \\ J_+\,|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\hbar\,|j,m+1\rangle \\ J_-\,|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\hbar\,|j,m-1\rangle \end{aligned}}$$

$$j = \frac{n}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}^0)$$

$-j \leq m \leq j$ $\quad$ ($2j+1$ valores)

Representaciones matriciales del impulso angular

A partir de $\left[J_x,\, J_y \right] = i\hbar J_z$ encontramos los autoestados y autovalores de $\{J^2, J_z\}$:

$$\begin{cases} J^2\,|j,m\rangle = j\,(j+1)\,\hbar^2\,|j,m\rangle \\ J_z\,|j,m\rangle = m\,\hbar\,|j,m\rangle \\ J_+\,|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\hbar\,|j,m+1\rangle \\ J_-\,|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\hbar\,|j,m-1\rangle \end{cases}$$

$$j = \frac{n}{2} \qquad -j \leq m \leq j$$

$$J_x = \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right)$$

$$J_y = \frac{1}{2i}\left(J_+ - J_-\right)$$

Esto da las representaciones de $\boldsymbol{J}$ en la base $\{|j,m\rangle\}$, matrices de $(2j+1)\times(2j+1)$:

$$\begin{aligned} \langle j,m'|\,J_+\,|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\;\hbar\;\langle j,m'|j,m+1\rangle \\ &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\;\hbar\;\;\delta_{m',\,m+1} \\ \langle j,m'|\,J_-\,|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\;\hbar\;\;\delta_{m',\,m-1} \end{aligned}$$

$$\langle j,m'|\,J_x\,|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\;\tfrac{\hbar}{2}\;\delta_{m',\,m+1} + \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\;\tfrac{\hbar}{2}\;\delta_{m',\,m-1}$$

$$\langle j,m'|\,J_z\,|j,m\rangle = \;m\,\hbar\;\;\delta_{m',m}$$

Representaciones matriciales del impulso angular

Para $j = \frac{1}{2}$, en la base $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, |\frac{1}{2}, \text{-}\frac{1}{2} \rangle \right\} = \{ |+\rangle, |-\rangle \}$:

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Representaciones matriciales del impulso angular

Para $j = 1$, en la base $\{|1,1\rangle,\ |1,0\rangle,\ |1,\text{-}1\rangle\}$:

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Representaciones matriciales del impulso angular

Para $j = \frac{3}{2}$, en la base $\{|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \text{-}\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \text{-}\frac{3}{2}\rangle\}$:

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Representaciones matriciales del operador rotación

Conocidas las representaciones (subespacios invariantes) de $\boldsymbol{J}$, podemos calcular las representaciones del operador rotación $, U_R(\boldsymbol{u},\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}\right)$ para cada j :

$$\langle j, m' |\, U_R(\boldsymbol{u},\theta)\, | j, m\rangle = \mathscr{D}^{j}_{m',m}(\boldsymbol{u},\theta)$$

$$\langle j, m' |\, U_R(\alpha,\beta,\gamma)\, | j, m\rangle = \mathscr{D}^{j}_{m',m}(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\langle j, m' |\, U_R(\boldsymbol{y},\beta)\, | j, m\rangle = d^{j}_{m',m}(\beta)$$

$$\mathscr{D}^{j}_{m',m}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-im'\alpha} e^{-im\gamma}\, d^{j}_{m',m}(\beta)$$

En particular hicimos $j = \frac{1}{2}$:

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}\right) = \exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\frac{\theta}{2} - i\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}\, \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\mathscr{D}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u},\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - iu_z \sin\frac{\theta}{2} & -(iu_x + u_y)\sin\frac{\theta}{2} \\ -(iu_x - u_y)\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} + iu_z \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad d^{\frac{1}{2}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Representaciones matriciales del operador rotación

Para $j = \frac{1}{2}$, en la base $\left\{ \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \right\}$:

$$d^{\frac{1}{2}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Para $j = 1$, en la base $\left\{ |1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle \right\}$:

$$d^{1}(\beta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\cos\beta & -\sqrt{2}\sin\beta & 1-\cos\beta \\ \sqrt{2}\sin\beta & 2\cos\beta & -\sqrt{2}\sin\beta \\ 1-\cos\beta & \sqrt{2}\sin\beta & 1+\cos\beta \end{pmatrix}$$