Problema 3. La idea de este problema es estudiar una modificación relativamente sencilla del oscilador armónico estudiado durante el curso, el oscilador armónico forzado por una fuerza constante F. El Hamiltoniano del problema es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx = H_0 - Fx \tag{1}$$

donde $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$ es el Hamiltoniano de un oscilador armónico ordinario.

a. En el primer ítem nos piden escribir el Hamiltoniano en función de los operadores a y $a^\dagger$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{mw}p\right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{mw}p\right) \tag{2}$$

La cuenta es bastante directa y efectivamente, por lo que corregí hasta ahora del problema, en general no trajo dificultades. Simplemente reescribimos x y p en función de a y $a^\dagger$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right), \quad p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(a^\dagger - a\right) \tag{3}$$

y luego reemplazamos en el Hamiltoniano. El término H_0 nos dará en Hamiltoniano del oscilador ordinario en términos de a y $a^\dagger$ y el término nuevo es simplemente proporcional a x. Por lo tanto

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - F\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right) \tag{4}$$

b. En el segundo ítem nos piden en primer lugar calcular los valores medios $\langle n| H |n\rangle$ y $\langle n| H^2 |n\rangle$. El primero de estos valores medios sale inmediatamente haciendo uso de la ayuda del enunciado

$$\langle n| x |n\rangle = 0 \tag{5}$$
$$\langle n| p |n\rangle = 0 \tag{6}$$
$$\langle n| x^2 |n\rangle = (2n+1)\frac{\hbar}{2m\omega} \tag{7}$$
$$\langle n| p^2 |n\rangle = (2n+1)\frac{m\omega\hbar}{2} \tag{8}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle n| H |n\rangle &= \frac{1}{2m}\langle n| p^2 |n\rangle + \frac{m\omega^2}{2}\langle n| x^2 |n\rangle - F\langle n| x |n\rangle && (9)\\
&= \frac{1}{2m}(2n+1)\frac{m\omega\hbar}{2} + \frac{m\omega^2}{2}(2n+1)\frac{\hbar}{2m\omega} - F\cdot 0 && (10)\\
&= \frac{\hbar\omega}{2}(2n+1) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) && (11)
\end{aligned}$$

Para el valor medio de H^2 notemos que la ayuda que recién usamos nos dice que $\langle n| x |n\rangle = 0$, o, lo que es lo mismo, $\langle n| (a + a^\dagger) |n\rangle = 0$. Por lo tanto, al expandir la expresión de H^2, nos conviene mantener los términos con $(a + a^\dagger)$ juntos y no expandir los respectivos cuadrados. Además, notemos que en $H = H_0 - F\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)$, el primer término, $H_0 = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$, tiene a los kets $|n\rangle$ como autoestados, es decir $H_0|n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle$. Esto va simplificar significativamente el calculo de los valores medios en un estado $|n\rangle$. Por este motivo al expandir H^2 también nos conviene mantener el término H_0 junto y no expandir los términos de adentro. Haciendo esto tenemos

$$\langle n| H^2 |n\rangle = \langle n| \left(H_0 - F\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \right)^2 |n\rangle \tag{12}$$

$$= \langle n| \left(H_0^2 + \frac{F^2\hbar}{2m\omega}(a^\dagger + a)^2 - F\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(H_0(a^\dagger + a) + (a^\dagger + a)H_0) \right) |n\rangle \tag{13}$$

$$= \langle n| H_0^2 |n\rangle + \langle n| \frac{F^2\hbar}{2m\omega}(a^\dagger + a)^2 |n\rangle - F\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \Big(\langle n| H_0(a^\dagger + a) |n\rangle + \langle n| (a^\dagger + a)H_0 |n\rangle \Big) \tag{14}$$

$$= (\hbar\omega)^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + F^2(2n+1)\frac{\hbar}{2m\omega} - F\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \Big(\langle n| (a^\dagger + a) |n\rangle + \langle n| (a^\dagger + a) |n\rangle \Big) \tag{15}$$

$$= (\hbar\omega)^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + F^2(2n+1)\frac{\hbar}{2m\omega} \tag{16}$$

donde usamos que como H_0 es hermítico y $|n\rangle$ es autoestado, entonces, $H_0 |n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2) |n\rangle$ y $\langle n| H_0 = \hbar\omega(n + 1/2) \langle n|$ (esta segunda relación se obtiene de la primera tomando el adjunto de ambos miembros de la igualdad y usando que H_0 es hermítico) y además usamos las ayudas $\langle n| x |n\rangle$ y $\langle n| x^2 |n\rangle$ escritas en términos de a y $a^\dagger$.

Luego, la varianza queda

$$\mathrm{Var}(H^2) = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \frac{F^2\hbar}{2m\omega}(2n+1)\,. \tag{17}$$

Finalmente el ítem pide si la base de autoestados de H_0, $\{|n\rangle\}$, puede coincidir con la de H. Hay distintas formas de contestar la pregunta, todas perfectamente válidas. Algunos aplicaron H sobre un $|n\rangle$ y mostraron que no queda algo proporcional a $|n\rangle$ (salvo que $F = 0$). Otros calcularon el conmutador $[H, N]$, con $N = a^\dagger a$ el operador de número del oscilador ordinario, y mostraron que no conmutan. Alternativamente, otra respuesta válida, que no implicaba ninguna cuenta adicional, consiste en notar que según el resultado recién obtenido, la varianza de la energía es distinta de cero. Por lo tanto, $|n\rangle$ no puede ser autoestado de H porque la varianza de un observable es cero en un estado si y sólo si el estado es autoestado del observable (y por lo tanto el estado tiene un valor del observable bien definido).

c. Finalmente llegamos al tercer ítem, que en base a las preguntas durante el parcial y a lo que corregí hasta ahora, es la pregunta que más costó en general. Dada la base $\{|n\rangle\}$, definimos una nueva base trasladada en posición en una distancia ℓ como

$$|n, \ell\rangle = e^{-ip\ell/\hbar} |n\rangle\,. \tag{18}$$

El ítem nos pide encontrar el valor de ℓ tal que $|n\ell\rangle$ son autoestados del Hamiltoniano forzado H, es decir

$$H |n\ell\rangle = E |n\ell\rangle\,. \tag{19}$$

La dificultad pasa, por empezar, por que no es trivial ver cómo opera $e^{-ip\ell/\hbar}$ sobre un ket $|n\rangle$ cualquiera en términos de los elementos de la base $\{|n\rangle\}$ y, por lo tanto, tampoco ver cómo opera H sobre $|n, \ell\rangle$. Hay (al menos) dos posibles caminos para resolver esto utilizando las ayudas dadas en el enunciado. Antes de pasar a la resolución quería aclarar que este problema es muy parecido a un problema que resolvimos en la práctica (problema 11 de la guía 5) en que se pedía demostrar que $aD(\alpha) |0\rangle = \alpha D(\alpha) |0\rangle$. El problema también es parecido al problema 12 de la guía 5, donde se pedía demostrar que el estado fundamental trasladado en posición es un estado coherente.

Veamos primero una forma de contestar la pregunta utilizando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Escribamos explícitamente la condición de autoestado

$$H |n\ell\rangle = E |n\ell\rangle\,. \tag{20}$$

Usando la definición de $|n\ell\rangle$ esto es equivalente a

$$He^{-ip\ell/\hbar}|n\rangle = Ee^{-ip\ell/\hbar}|n\rangle\,. \tag{21}$$

La expresión a la izquierda es casi lo que aparece en la fórmula de la ayuda, salvo que falta una exponencial $e^{+ip\ell/\hbar}$ a la izquierda de H. Para hacer que aparezca podemos multiplicar a ambos miembros de la igualdad por este operador obteniendo

$$e^{ip\ell/\hbar}He^{-ip\ell/\hbar}|n\rangle = e^{ip\ell/\hbar}Ee^{-ip\ell/\hbar}|n\rangle = E|n\rangle\,, \tag{22}$$

donde usamos que $e^{ip\ell/\hbar} = \left(e^{-ip\ell/\hbar}\right)^{-1}$. Notemos que esta igualdad es simplemente una ecuación de autovalores para el operador Hamiltoniano transformado $e^{ip\ell/\hbar}He^{-ip\ell/\hbar}$, donde lo que buscamos es ℓ tal que los kets $|n\rangle$ sean los autoestados.

Para escribir el operador del miembro izquierdo de la igualdad de forma que sea útil para resolver esta ecuación de autovalores, usamos la ayuda de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^{ip\ell/\hbar}He^{-ip\ell/\hbar} = H + [ip\ell/\hbar, H] + \frac{1}{2}[ip\ell/\hbar,[ip\ell/\hbar,H]] + \frac{1}{3!}[ip\ell/\hbar,[ip\ell/\hbar,[ip\ell/\hbar,H]]] + \cdots \tag{23}$$

Para el primer conmutador tenemos

$$\begin{aligned}
[ip\ell/\hbar, H] &= \frac{i\ell}{\hbar}\left[p, \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx\right] && (24)\\
&= \frac{i\ell}{\hbar}\left[p, \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx\right] && (25)\\
&= \frac{i\ell}{\hbar}\left(\frac{m\omega^2}{2}[p,x^2] - F[p,x]\right) && (26)\\
&= \frac{i\ell}{\hbar}\left(\frac{m\omega^2}{2}(-2i\hbar x) - F(-i\hbar\mathbb{I})\right) && (27)\\
&= \ell m\omega^2 x - \ell F\mathbb{I} && (28)
\end{aligned}$$

Para el segundo conmutador tenemos

$$\begin{aligned}
[ip\ell\hbar, [ip\ell/\hbar, H]] &= \frac{i\ell}{\hbar}\left[p, \ell m\omega^2 x - \ell F\mathbb{I}\right] && (29)\\
&= \frac{i\ell}{\hbar}\left[p, \ell m\omega^2 x\right] && (30)\\
&= \frac{i\ell^2 m\omega^2}{\hbar}[p,x] && (31)\\
&= \frac{i\ell^2 m\omega^2}{\hbar}(-i\hbar\mathbb{I}) && (32)\\
&= \ell^2 m\omega^2\mathbb{I} && (33)
\end{aligned}$$

Como este conmutador es proporcional a la identidad, entonces todos los siguientes términos en la serie se anulan. Finalmente

$$e^{ip\ell/\hbar}He^{-ip\ell/\hbar} = H + \ell m\omega^2 x - \ell F\mathbb{I} + \frac{\ell^2 m\omega^2}{2}\mathbb{I} \tag{34}$$

Notemos que el Hamiltoniano transformado nos quedó escrito en términos de operadores x, p (e identidades) y por lo tanto también en términos de a y $a^\dagger$. Por lo tanto, podemos calcular cómo opera este operador sobre $|n\rangle$ y así resolver la ecuación de autovalores. Para hacer esto de forma sencilla, reescribamos primero el operador Hamiltoniano transformado de la forma

$$e^{ip\ell/\hbar}He^{-ip\ell/\hbar} = H_0 + \left(\frac{\ell^2 m\omega^2}{2} - \ell F\right)\mathbb{I} + (\ell m\omega^2 - F)x \tag{35}$$

Notemos que para los primeros dos términos (el Hamiltoniano del oscilador ordinario y un operador proporcional a la identidad) ya se satisface que el $|n\rangle$ es autoestado; solamente hace falta que también valga para el término proporcional a x. Efectivamente tenemos

$$\begin{aligned}
e^{ip\ell/\hbar}He^{-ip\ell/\hbar}|n\rangle &= \left(H_0 + \left(\frac{\ell^2 m\omega^2}{2} - \ell F\right)\mathbb{I} + (\ell m\omega^2 - F)x\right)|n\rangle && (36)\\
&= \left(\hbar\omega(n+1/2) + \left(\frac{\ell^2 m\omega^2}{2} - \ell F\right)\right)|n\rangle + (\ell m\omega^2 - F)x|n\rangle && (37)\\
&= \left(\hbar\omega(n+1/2) + \left(\frac{\ell^2 m\omega^2}{2} - \ell F\right)\right)|n\rangle + (\ell m\omega^2 - F)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)|n\rangle && (38)\\
&= \left(\hbar\omega(n+1/2) + \left(\frac{\ell^2 m\omega^2}{2} - \ell F\right)\right)|n\rangle + (\ell m\omega^2 - F)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle + \sqrt{n}\,|n-1\rangle\right) && (39)\\
&= E|n\rangle && (40)
\end{aligned}$$

Notemos que $\{|n\rangle\}$ es una base ortonormal, es decir que los estados $|n\rangle$ son todos linealmente independientes entre sí. Por lo tanto, la única forma de que $|n\rangle$ sea autoestado es que los términos proporcionales a $|n+1\rangle$ y $|n-1\rangle$ se anulen. Esto se tiene sólo si

$$\ell = \frac{F}{m\omega^2} \tag{41}$$

y la energía correspondiente es todo el término que queda multiplicando a $|n\rangle$:

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\ell^2 m\omega^2}{2} - \ell F = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{F^2}{2m\omega^2} \tag{42}$$

donde usamos que $\ell = F/(m\omega^2)$.

En cuanto a la interpretación, notemos que demostramos que los autoestado del Hamiltoniano con un forzado constante son los autoestados del oscilador ordinario trasladados en una distancia $\ell = F/(m\omega^2)$. Recordemos que en mecánica clásica cuando tenemos un oscilador con un forzado constante (piensen por ejemplo en el típico problema de Física 2 de un resorte colgado del techo en el cuál se tiene en cuenta la fuerza gravitatoria) el efecto que se tiene es justamente un simple corrimiento del punto de equilibrio del sistema. Es más, si escriben las ecuaciones de movimiento clásicas e imponen $\ddot{x} = 0$, van a obtener que el corrimiento es justamente en una distancia $F/(m\omega^2)$. Todo esto es completamente análogo a los resultados aquí obtenidos.

Finalmente, permítanme brevemente contarles cuál era otro posible camino para la resolución del ítem. Partamos nuevamente de la ecuación de autoestados inicial

$$He^{-ip\ell/\hbar}|n\rangle = Ee^{-ip\ell/\hbar}|n\rangle\,. \tag{43}$$

Como dijimos antes, no sabemos exactamente cómo escribir la acción de $e^{-ip\ell/\hbar}$ sobre $|n\rangle$ en términos de los vectores de la base $\{|n\rangle\}$. Sin embargo, sí sabemos cómo actúa H (pues lo tenemos escrito en términos de a y $a^\dagger$). Por lo tanto, podemos tratar de conmutarlos, teniendo en cuenta cuanto vale en conmutador:

$$He^{-ip\ell/\hbar} = e^{-ip\ell/\hbar}H + \left[H, e^{-ip\ell/\hbar}\right] \tag{44}$$

La dificultad ahora es calcular el conmutador y ver si nos queda algo que podemos aplicar sobre $|n\rangle$ de forma sencilla. Tenemos

$$\begin{aligned}
\left[H, e^{-ip\ell/\hbar}\right] &= \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx, e^{-ip\ell/\hbar}\right] && (45)\\
&= \left[\frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx, e^{-ip\ell/\hbar}\right] && (46)\\
&= \frac{m\omega^2}{2}\left[x^2, e^{-ip\ell/\hbar}\right] - F\left[x, e^{-ip\ell/\hbar}\right] && (47)\\
& && (48)
\end{aligned}$$

Para calcular estos conmutadores queremos usar la fórmula de la ayuda

$$[f(A), B] = \frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}A}[A, B] \tag{49}$$

si A y B conmutan con $[A, B]$.

Para el segundo de los conmutadores, $\left[x, e^{-ip\ell/\hbar}\right]$ esta fórmula se puede aplicar directamente puesto que $[x, p] = i\hbar$ y se satisface la condición. Por lo tanto

$$\begin{align} \left[x, e^{-ip\ell/\hbar}\right] &= -\left[e^{-ip\ell/\hbar}, x\right] \tag{50}\\ &= -\frac{-i\ell}{\hbar}e^{-ip\ell/\hbar}[p, x] \tag{51}\\ &= -\frac{-i\ell}{\hbar}e^{-ip\ell/\hbar}(-i\hbar) \tag{52}\\ &= \ell e^{-ip\ell/\hbar} \tag{53} \end{align}$$

Para el primer conmutador, $\left[x^2, e^{-ip\ell/\hbar}\right]$, en cambio, como $\left[x^2, p\right] = 2i\hbar x$, entonces no se satisface la condición de que p conmute con el conmutador de $\left[x^2, p\right]$ para poder aplicar la fórmula (de hecho corregí un par de parciales que vi que llegaron hasta ahí y después abandonaron este camino). Sin embargo, notemos que podemos usar la otra propiedad de la ayuda del conmutador con el producto de operadores, $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$, para reescribir el conmutador contra x^2 en términos de conmutadores contra x, para los cuales sí vale la fórmula. Concretamente

$$\begin{align} \left[x^2, e^{-ip\ell/\hbar}\right] &= -\left[e^{-ip\ell/\hbar}, x^2\right] \tag{54}\\ &= -\left[e^{-ip\ell/\hbar}, x\right]x - x\left[e^{-ip\ell/\hbar}, x\right] \tag{55}\\ &= \ell e^{-ip\ell/\hbar}x + x\ell e^{-ip\ell/\hbar} \tag{56}\\ & \tag{57} \end{align}$$

Recordemos que todo esto es útil si podemos escribir los operadores con las traslaciones a la izquierda y operadores que sabemos cómo actúan sobre $|n\rangle$ a la derecha. Por lo tanto habría que conmutar de nuevo el segundo término

$$\begin{align} xe^{-ip\ell/\hbar} &= e^{-ip\ell/\hbar}x + \left[x, e^{-ip\ell/\hbar}\right] \tag{58}\\ &= e^{-ip\ell/\hbar}x + \ell e^{-ip\ell/\hbar} \tag{59} \end{align}$$

Finalmente

$$\begin{align} \left[H, e^{-ip\ell/\hbar}\right] &= \frac{m\omega^2}{2}\left[x^2, e^{-ip\ell/\hbar}\right] - F\left[x, e^{-ip\ell/\hbar}\right] \tag{60}\\ &= \frac{m\omega^2}{2}e^{-ip\ell/\hbar}\left(2\ell x + \ell^2\right) - F\ell e^{-ip\ell/\hbar} \tag{61}\\ & \tag{62} \end{align}$$

y entonces

$$He^{-ip\ell/\hbar} = e^{-ip\ell/\hbar}H + \frac{m\omega^2}{2}e^{-ip\ell/\hbar}\left(2\ell x + \ell^2\right) - F\ell e^{-ip\ell/\hbar} \tag{63}$$

Nuevamente juntamos los términos proporcionales a x y la resolución sigue como en el caso anterior.

d. La idea del cuarto ítem era hacer una cuenta muy sencilla usando la ayuda que todo estado coherente $|\alpha\rangle$ se escribe como

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle \tag{64}$$

donde $D(\alpha)$ es el operador desplazamiento en el espacio de fases. De las definiciones del ítem anterior tenemos que

$$|0,\ell\rangle = e^{-ip\ell/\hbar}\,|0\rangle \tag{65}$$

Si reescribimos p en función de a y $a^\dagger$ tenemos

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a) \tag{66}$$

y entonces

$$|0,\ell\rangle = e^{\ell\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(a^\dagger - a)}\,|0\rangle\,. \tag{67}$$

Por lo tanto, el estado $|0,\ell\rangle$ es un estado coherente con autovalor $\alpha = \ell\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$.

e. Se nos pide calcular las dispersiones en posición y momento para un autoestado de energía $|n,\ell\rangle$. Por lo tanto tendremos que calcular valores medios del tipo

$$\langle n,\ell|\,x\,|n,\ell\rangle = \langle n|\,e^{ip\ell/\hbar}xe^{-ip\ell/\hbar}\,|n\rangle \tag{68}$$

El enunciado nos sugiere para hacer esta cuenta primero calcular los operadores x, x^2, p y p^2 transformados. El caso más sencillo es el del momento, puesto que como p y p^2 conmutan con $e^{-ip\ell/\hbar}$ tenemos

$$e^{ip\ell/\hbar}pe^{-ip\ell/\hbar} = p \tag{69}$$

$$e^{ip\ell/\hbar}p^2e^{-ip\ell/\hbar} = p^2 \tag{70}$$

Entonces, $\langle n,\ell|\,p\,|n,\ell\rangle = \langle n|\,p\,|n\rangle$ y $\langle n,\ell|\,p^2\,|n,\ell\rangle = \langle n|\,p^2\,|n\rangle$. Utilizando las ayudas tenemos directamente cuánto valen estos valores medios y entonces

$$\mathrm{Var}(p) = (2n+1)\frac{\hbar m\omega}{2}. \tag{71}$$

Para la posición, en cambio, usando la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff de la ayuda tenemos

$$\begin{aligned} e^{ip\ell/\hbar}xe^{-ip\ell/\hbar} &= x + [ip\ell/\hbar, x] + \frac{1}{2}[ip\ell/\hbar,[ip\ell/\hbar,x]] + \cdots & (72)\\ &= x + \ell & (73)\end{aligned}$$

donde simplemente reemplazamos los conmutadores que ya calculamos en el ítem (c). Para x^2, podemos proceder análogamente y calcular los conmutadores (la cuenta está hecha en el ítem (c)). Alternativamente, podemos aprovechar que la inversa de la exponencial se tiene simplemente cambiando de signo el exponente y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} e^{ip\ell/\hbar}x^2e^{-ip\ell/\hbar} &= e^{ip\ell/\hbar}xe^{-ip\ell/\hbar}e^{ip\ell/\hbar}xe^{-ip\ell/\hbar} & (74)\\ &= (x+\ell)(x+\ell) & (75)\\ &= x^2 + 2\ell x + \ell^2 & (76)\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle n,\ell|\,x\,|n,\ell\rangle &= \langle n|\,x\,|n\rangle + \ell = \ell & (77)\\ \langle n,\ell|\,x^2\,|n,\ell\rangle &= \langle n|\,x^2\,|n\rangle + 2\ell\,\langle n|\,x\,|n\rangle + \ell^2 = (2n+1)\frac{\hbar}{2m\omega} + \ell^2 & (78)\\ & & (79)\end{aligned}$$

y entonces

$$\mathrm{Var}(x) = (2n+1)\frac{\hbar}{2m\omega} \tag{80}$$

Notemos que las varianzas quedan iguales a las del oscilador armónico ordinario (esto tiene sentido, pues la función de onda en posición es simplemente la misma función de onda ordinaria pero trasladada en ℓ; por lo tanto las varianzas, que se miden respecto de los valores medios, no cambiarán al hacer una traslación de la función de onda).

El producto de varianzas es

$$\mathrm{Var}(x)\mathrm{Var}(p) = \frac{\hbar^2}{4}(2n+1)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{81}$$

y la relación de incerteza generalizada se satisface, como debe ser. Para el caso $n = 0$, de la misma forma que en oscilador ordinario, se tiene que se cumple la relación de incerteza mínima y, por lo tanto, la función de onda del estado fundamental debe ser una gaussiana.

f. Finalmente, en el último ítem se nos pide calcular la evolución temporal de los operadores posición y momento en la representación de Heisenberg.

Para x tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{1}{i\hbar}[x, H] \tag{82}$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\left[x, \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx\right] \tag{83}$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\left[x, \frac{p^2}{2m}\right] \tag{84}$$
$$= \frac{1}{2im\hbar}\left[x, p^2\right] \tag{85}$$
$$= \frac{1}{2im\hbar}(2i\hbar p) \tag{86}$$
$$= \frac{p(t)}{m} \tag{87}$$

Para p tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) = \frac{1}{i\hbar}[p, H] \tag{88}$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\left[p, \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx\right] \tag{89}$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\left[p, \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx\right] \tag{90}$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\left(\frac{m\omega^2}{2}\left[p, x^2\right] - F[p, x]\right) \tag{91}$$
$$= -m\omega^2 x(t) + F \tag{92}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = -\omega^2 x(t) + \frac{F}{m} \tag{93}$$

Notemos que esta ecuación para la evolución temporal del operador $x(t)$ es completamente análoga a la de un oscilador clásico con un forzado constante. La forma de resolverla también será similar. Buscamos primero una solución del problema homogéneo ($F = 0$) y luego la solución más general posible es la suma de la solución del homogéneo más una solución particular. Para el homogéneo

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_{hom}(t) = -\omega^2 x(t) \tag{94}$$

la solución es de la forma

$$x_{hom}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{95}$$

donde A y B son operadores a determinar por las condiciones iniciales

$$x(0) = x^S; \quad p(0) = p^S \tag{96}$$

con x^S y p^S los operadores en el marco de Schrödinger.
Una solución particular se puede encontrar buscando una solución independiente del tiempo

$$0 = -\omega^2 x_{part} + \frac{F}{m} \implies x_{part} = \frac{F}{m\omega^2} \tag{97}$$

Luego, la solución general es de la forma

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{F}{m\omega^2} \tag{98}$$

$$p(t) = -m\omega A\sin(\omega t) + m\omega B\cos(\omega t) \tag{99}$$

Imponiendo las condiciones iniciales tenemos

$$x(0) = A + \frac{F}{m\omega^2} \tag{100}$$

$$p(0) = m\omega B \tag{101}$$

y entonces

$$A = x^S - \frac{F}{m\omega^2} \tag{102}$$

$$B = \frac{p^S}{m\omega} \tag{103}$$

Finalmente, para el valor medio de posición en función del tiempo tenemos

$$\langle n,\ell|\, x(t)\,|n,\ell\rangle = \langle n,\ell|\, x^S\,|n,\ell\rangle \cos(\omega t) + \frac{1}{m\omega}\langle n,\ell|\, p^S\,|n,\ell\rangle \sin(\omega t) + \frac{F}{m\omega^2}(1-\cos(\omega t)) \tag{104}$$

$$= \ell\cos(\omega t) + \frac{F}{m\omega^2}(1-\cos(\omega t)) \tag{105}$$

$$= \frac{F}{m\omega^2} \tag{106}$$

y análogamente para el momento

$$\langle n,\ell|\, p(t)\,|n,\ell\rangle = -m\omega\langle n,\ell|\, x^S\,|n,\ell\rangle \sin(\omega t) + \langle n,\ell|\, p^S\,|n,\ell\rangle \cos(\omega t) + \frac{F}{\omega}\sin(\omega t) \tag{107}$$

$$= -m\omega\ell\sin(\omega t) + \frac{F}{\omega}\sin(\omega t) \tag{108}$$

$$= 0 \tag{109}$$

donde para los últimos pasos usamos la expresión de ℓ que encontramos en el ítem (c).