Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2018

Guía 9: Sistemas compuestos y entrelazamiento cuántico

1. El Hamiltoniano dependiente del espín de un sistema electrón-positrón en presencia de un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, puede escribirse como

$$H = A\boldsymbol{S}^{(e^-)} \cdot \boldsymbol{S}^{(e^+)} + \left(\frac{eB}{mc}\right)\left(S_z^{(e^-)} - S_z^{(e^+)}\right).$$

Suponga que la función de espín del sistema está dada por $|+\rangle_{e-} \otimes |-\rangle_{e+}$.

a) ¿Es ésta una autofunción de H en el límite $A \to 0$, $eB/mc \neq 0$? Si lo es, ¿cuál es el autovalor de energía? Si no lo es, ¿cuál es el valor de expectación de H?

b) Repita el problema cuando $eB/mc \to 0$, $A \neq 0$.

2. Supongamos que se quiere medir un observable A de un dado sistema. Para un observable general, puede no resultar obvio cómo realizar la medición en la práctica en un experimento real. A continuación presentaremos un método simplificado para medir el valor del observable acoplando el sistema a un sistema auxiliar (típicamente denominado "puntero" o "aparato de medición") cuyos estados suponemos fácilmente distinguibles. Por ejemplo, en el modelo a estudiar, utilizaremos la posición del sistema auxiliar. Por simplicidad supondremos además que el observable es no degenerado, de forma tal que

$$A = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|, \quad a_i \neq a_j, \text{ si } i \neq j.$$

Denotaremos al sistema cuyo observable queremos medir como $\mathcal{S}$, mientras que al sistema auxiliar será $\mathcal{M}$, de forma tal que el sistema total estará representado por el espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\mathcal{S} \otimes \mathscr{H}_\mathcal{M}$. Para realizar la medición se evoluciona al sistema compuesto según una transformación unitaria

$$U = e^{-i\lambda A \otimes p/\hbar}.$$

donde λ es una constante conocida.

(Proponga un Hamiltoniano H del sistema total $\mathscr{H}_\mathcal{S} \otimes \mathscr{H}_\mathcal{M}$ tal que esta evolución unitaria corresponde a la evolución temporal por un cierto tiempo T.)

a) Calcule la acción de la transformación U sobre el estado $|a_i\rangle_\mathcal{S} \otimes |x = x_0\rangle_\mathcal{M}$, donde $|x = x_0\rangle_\mathcal{M}$ es un autoestado de la posición de $\mathcal{M}$. ¿Cómo puede interpretar la acción de U?

b) Supongamos que el sistema auxiliar se encuentra inicialmente en un estado Gaussiano, $|0, \sigma\rangle_\mathcal{M}$, centrado en el origen y con varianza σ, es decir tal que

$$\langle x|0, \sigma\rangle_\mathcal{M} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2}.$$

Calcule en tal caso

$$U |a_i\rangle \otimes |0, \sigma\rangle_\mathcal{M}.$$

¿Cómo puede interpretar la acción de U? Si se medie la posición de $\mathcal{M}$ luego de aplicar U, ¿cuál es la densidad de probabilidad en posición? ¿Puede inferir el valor de a_i a partir del resultado?

c) Suponga ahora que el estado inicial de $\mathcal{S}$ es un estado general

$$|\psi\rangle_{\mathcal{S}} = \sum_i c_i |a_i\rangle ,$$

¿Cuál es la probabilidad de obtener a_i si se mide A sobre $|\psi\rangle_{\mathcal{S}}$?
Nuevamente el sistema auxiliar comienza en el mismo estado Gaussiano del ítem anterior, $|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$. Calcule el estado del sistema luego de la aplicación de U. Si se mide la posición de $\mathcal{M}$, ¿cuál es la densidad de probabilidad de la posición? ¿Puede inferir los posibles valores de a_i y las probabilidades correspondientes? ¿Qué pasa en particular si se elige λ tal que $\lambda(a_{i+1} - a_i) \gg \sigma\ \forall i$?

d) (*Opcional*) En el análisis anterior ignoramos los Hamiltonianos de cada sistema. En particular, si $\mathcal{M}$ representa el grado de libertad de posición de una partícula, deberíamos, por lo menos, considerar el Hamiltoniano de partícula libre $H_{\mathcal{M}} = p^2/2m$. A su vez, el sistema $\mathcal{S}$ puede tener un propio Hamiltoniano H_0, de forma tal que inicialmente tenemos $H = H_0 \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{M}} + \mathbb{I}_{\mathcal{S}} \otimes \frac{p^2}{2m}$. Para realizar la medición se enciende una interacción de la forma $H_{\text{int}} = g\, A \otimes p$ durante un tiempo T (con g una constante). Por simplicidad vamos a asumir que A conmuta con H_0. En tal caso, repita los ítems anteriores pero utilizando como transformación la evolución $U = e^{-iH_{\text{tot}}T/\hbar}$ con

$$H_{\text{tot}} = H_0 + \frac{p^2}{2m} + g\, A \otimes p.$$

¿Cómo cambian los resultados antes obtenidos?

3. Vamos a reconsiderar el experimento de Stern-Gerlach, agregando el grado de libertad de posición de los átomos (que hasta ahora solo consideramos cualitativamente). En presencia de un campo magnético $\boldsymbol{B}$, un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ tiene una energía de interacción $-\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$. Para un espín tenemos que $\boldsymbol{\mu} = -|\mu|\boldsymbol{S}$ (con $\boldsymbol{S}$ el operador de espín y $|\mu|$ una constante que depende de las propiedades de la partícula, como su masa, carga y el factor-g). Si estamos en una región del espacio donde $\boldsymbol{B} = B(z)\hat{\boldsymbol{z}}$ y además el gradiente del campo es aproximadamente constante, es decir $\frac{\partial B}{\partial z} \approx$ cte, entonces el Hamiltoniano de interacción está dado por

$$H_{\text{int}} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} z \otimes \sigma_z .$$

En vista del problema anterior, ¿cómo puede interpretar el efecto de la evolución temporal generada por H_{int}? ¿Cómo puede interpretar esto en términos del experimento de Stern-Gerlach?

4. **Teorema de no clonación**: El teorema de no clonación, primero demostrado por Wootters, Zurek y Dieks en 1982, establece que resulta imposible construir una transformación unitaria cuya acción sea copiar el estado de un sistema a otro. Este resultado tiene profundas consecuencias en el área de la información cuántica. Formalmente, supongamos que tenemos dos sistemas A y B con un mismo espacio de Hilbert $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A = \mathscr{H}_B$. El objetivo es buscar alguna operación unitaria U sobre el espacio producto $\mathscr{H}_{AB} = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$, y un estado $|\alpha\rangle_B$ cualquiera (pero fijo) de B tales que, para todo estado $|\psi\rangle_A$ de A tenemos que

$$U\left(|\psi\rangle_A \otimes |\alpha\rangle_B\right) = e^{i\theta(\psi,\alpha)}\, |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B , \qquad \forall\, |\psi\rangle_A \in \mathscr{H},$$

es decir que, a menos de una fase global $\theta(\psi, \alpha)$, el efecto de U es copiar el estado de A al sistema B.

a) Demostrar que esto es imposible. Ayuda: para ello, asuma que vale para dos estados distintos $|\psi\rangle_A$ y $|\phi\rangle_A$ y calcule el producto interno $\left(\langle\phi|_A \otimes \langle\alpha|_B\right)\left(|\psi\rangle_A \otimes |\alpha\rangle_B\right)$ y utilice la unitariedad de U. Concluya entonces que la existencia de U es imposible que valga para cualquier par de estados $|\psi\rangle_A$ y $|\phi\rangle_A$. ¿Qué relación deben cumplir $|\psi\rangle_A$ y $|\phi\rangle_A$ para no llegar a una contradicción?

b) A la luz de lo establecido por el teorema de no-clonación y considerando el postulado de medición, discuta lo siguiente: suponga que posee una *única* partícula en un estado desconocido, ¿podría realizar una (o más) mediciones de forma tal de determinar con certeza cuál era el estado del sistema?

5. **Base producto y base de Bell**: Considere un sistema compuesto de dos partes, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2 (denotados como $\mathscr{H}_A$ y $\mathscr{H}_B$). En cada uno de esos espacios se define una base de estados $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ y $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$. Asimismo, se definen observables σ_i^A y σ_i^B $(i = x, y, z)$ para ambos sistemas, cuyas representaciones matriciales en estas bases están dadas por las matrices de Pauli de forma tal que $|0\rangle_A$ y $|1\rangle_A$ son autoestados de σ_z^A con autovalor $+1$ y -1, respectivamente (y análogamente para B).

   a) Encuentre una base del espacio de estados del sistema compuesto $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$, cuyos elementos correspondan a estados producto. Encuentre otra base donde los vectores no sean estados producto.

   b) Considere los siguientes conjuntos de observables para el sistema compuesto: $D = \left\{\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B, \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B\right\}$, $M = \left\{\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B, \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B\right\}$. Demuestre que tanto D como M son conjuntos completos de observables que conmutan. Encuentre una base de autoestados para los operadores de D, y otra para los de M.

6. Considere los siguientes estados de un sistema compuesto por dos subsistemas de dimensión 2 (donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ son los autoestados de σ_z con autovalor ± 1, respectivamente):

$$\left|\Phi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right)$$
$$\left|\Psi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right),$$

   que conforman la comúnmente denominada *base de Bell*.

   a) Calcule las probabilidades de los resultados posibles en la medición de un observable cualquiera sobre el subsistema A.

   b) Para cada uno de los estados $|\Phi^{\pm}\rangle$ y $|\Psi^{\pm}\rangle$ calcule el valor medio de los observables $\hat{\boldsymbol{n}}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A \otimes \hat{\boldsymbol{n}}_B \cdot \boldsymbol{\sigma}_B$, donde $\hat{\boldsymbol{n}}_A$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_B$ son dos versores arbitrarios.

7. **Desigualdad CHSH**: Se prepara un sistema compuesto de dos partículas de espín 1/2 en el estado $|\Psi^-\rangle$.

   a) Mostrar que este estado es rotacionalmente invariante, es decir que no cambia de forma ante una rotación cualquiera.

   b) Se envía cada una de las partículas a un laboratorio diferente A y B donde se mide el espín en direcciones arbitrarias. Llamamos $C(\hat{\boldsymbol{n}}_A, \hat{\boldsymbol{n}}_B)$ al valor medio de la correlación de dichas mediciones respecto de los ejes $\hat{\boldsymbol{n}}_A$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_B$. Suponiendo localidad y realismo Clauser, Horne, Shimony y Holt mostraron que

$$\left|C(\hat{\boldsymbol{n}}_A, \hat{\boldsymbol{n}}_B) - C(\hat{\boldsymbol{n}}_A, \hat{\boldsymbol{n}}_B^{'}) + C(\hat{\boldsymbol{n}}_A^{'}, \hat{\boldsymbol{n}}_B) + C(\hat{\boldsymbol{n}}_A^{'}, \hat{\boldsymbol{n}}_B^{'})\right| \leq 2$$

Usando el resultado del problema 6.b, encuentre direcciones $\hat{\boldsymbol{n}}_A$, $\hat{\boldsymbol{n}}_B$, $\hat{\boldsymbol{n}}_A'$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_B'$ donde se muestre que la mecánica cuántica viola el resultado de CHSH.

8. **Medición en la base de Bell**: Considere un sistema compuesto por dos subsistemas de dimensión 2. Definimos las operaciones

$$U_H = \frac{(\sigma_z + \sigma_x)}{\sqrt{2}} \otimes \mathbb{I}$$
$$U_{\mathrm{CNOT}} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x$$

donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ es la base de autoestados ± 1, respectivamente, de σ_z de una de las partículas.

a) Muestre que las operaciones U_H y U_{CNOT} son unitarias.

b) Muestre que la secuencia de operaciones $U_H\, U_{\mathrm{CNOT}}$ genera el cambio de base de la base de Bell $\{|\Phi^{\pm}\rangle, |\Psi^{\pm}\rangle\}$ a la base producto $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

c) Discuta cómo se puede utilizar esto para realizar una medición que distinga los estados de la base de Bell.

9. **Teleportación de estados cuánticos**: Supongamos que una persona, Alice, quiere transmitir el estado cuántico de una partícula a otra persona, Bob. Es más, Alice, en principio, no conoce cuál es el estado de la partícula. Por supuesto, una posibilidad sería que Alice le envíe a Bob el sistema físico que se encuentra en dicho estado. Sin embargo, en ciertos casos podría ser que Alice no quiera (o pueda) enviar la partícula que posee. Por el teorema de no clonación (ver problema 4), tampoco puede simplemente copiar el estado. A continuación presentamos un protocolo que le permite a Alice transmitir el estado sin enviar la partícula ni saber cuál es el estado.

El estado inicial, arbitrario y desconocido, que Alice quiere transmitir es

$$|\Psi\rangle_S = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,,$$

donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son los autoestados de σ_z con autovalor ± 1, respectivamente. Denotamos además con $\mathscr{H}_S$ al espacio de Hilbert correspondiente a esta partícula.

Supongamos además que Alice y Bob comparten un par de partículas con un grado de libertad de dimensión 2 cada una (cuyos espacios de Hilbert serán $\mathscr{H}_A$ y $\mathscr{H}_B$, respectivamente) y que se encuentra inicialmente en el estado entrelazado

$$\left|\Phi^+\right\rangle_{AB} = \frac{1}{2}\left(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\right).$$

a) Escriba el estado inicial del sistema total $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ en la base producto.

b) Escriba nuevamente el estado del sistema pero ahora describa el estado de las partículas que posee Alice, es decir el estado del subespacio $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_A$, usando la base Bell (definida en el problema 6).

c) Suponga que Alice mide en la base de Bell sobre $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_A$. ¿Qué resultados puede obtener y con qué probabilidad? ¿Cual es el estado del sistema luego de la medición en cada caso? En particular, si el sistema queda proyectado sobre el estado $|\Phi^+\rangle_{SA}$, ¿cuál es el estado del sistema de Bob?

d) Suponga que Alice le comunica a Bob cuál fue el resultado de la medición. Muestre que entonces, en cada caso Bob puede aplicar una transformación unitaria adecuada a su subsistema para transformar el estado en el estado $|\Psi\rangle_B = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, que era justamente el estado que Alice quería transmitir.

e) Repita el problema pero si, en cambio, Alice y Bob comparten el estado entrelazado $|\Psi^-\rangle$. ¿Cómo cambia el resultado?

10. **Codificación superdensa**: Supongamos que Alice y Bob poseen cada uno una partícula con un grado de libertad de dimensión 2 y que además inicialmente se encuentran en el estado entrelazado
$$\left|\Phi^+\right\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right).$$

a) Muestre que aplicando transformaciones unitarias apropiadas únicamente sobre su subsistema, Alice puede crear cualquiera de los otros tres estados de la base de Bell. (si los sistemas fuesen espines 1/2, ¿cómo se podrían generar estas transformaciones unitarias?).

b) Suponga que Alice le envía su partícula a Bob, quién realiza una medición en la base de Bell. Discuta cómo de esta forma Alice puede enviar un mensaje (con dos *bits* de información) a Bob.

11. Considere un sistema compuesto por tres partes, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2.

a) Encuentre una base del espacio de estados compuesto formada por vectores producto. En particular, encuentre la base de estados comunes de los operadores $\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B \otimes \mathbb{I}^C$, $\mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B \otimes \mathbb{I}^C$, y $\mathbb{I}^A \otimes \mathbb{I}^B \otimes \sigma_z^C$.

b) Encuentre la base de autoestados comunes de los siguientes operadores: $\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B \otimes \mathbb{I}^C$, $\mathbb{I}^A \otimes \sigma_x^B \otimes \sigma_x^C$, y $\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B \otimes \sigma_z^C$. Para cada uno de estos estados, calcule las probabilidades para los resultados de la medición de un observable cualquiera, para la partícula A, para la partícula B y para la partícula C.

12. El siguiente argumento fue propuesto por D. Mermin (ver *Am. J. Phys*, **58**, 731 [1990], o *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 3373 [1990]), como un ejemplo de la incompatibilidad de la mecánica cuántica con la posibilidad de asignar valores predeterminados a los observables, independientemente de si se realiza una medición. Considere un sistema de 3 partículas de espín 1/2 (que denotamos A, B y C). Inicialmente las partículas se encuentran en el estado

$$|\Psi\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle - |111\rangle\right).$$

a) Muestre que $|\Psi\rangle$ es autoestado de los siguientes cuatro operadores

$$\begin{aligned} O_1 &= \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y & O_2 &= \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \\ O_3 &= \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x & O_4 &= \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \end{aligned}$$

Diga cuáles son los autovalores correspondientes.

b) Verifique que los cuatro operadores conmutan entre sí, y que además

$$(\sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y)(\sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y)(\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x) = -(\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x)$$

c) Supongamos que se quiere asignar un valor predeterminado simultáneo a los distintos observables σ_j^S (con $S = A, B, C$; $j = x, y$), que denotamos m_j^S. Concluya entonces que

1) la medición de O_1 implica que $m_x^A m_y^B m_y^C = +1$.
2) la medición de O_2 implica que $m_y^A m_x^B m_y^C = +1$.

3) la medición de O_3 implica que $m_y^A m_y^B m_x^C = +1$.

4) la medición de O_4 implica que $m_x^A m_x^B m_x^C = -1$.

d) Note que $(m_x^A m_y^B m_y^C)(m_y^A m_x^B m_y^C)(m_y^A m_y^B m_x^C) = m_x^A m_x^B m_x^C$. Comparando con lo obtenido antes, muestre que se llega a una contradicción.