Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2018

Guía 10: Matriz densidad

1. Considere un sistema de espín 1/2. Compare los valores medios y los posibles resultados que pueden obtenerse al medir el espín en las tres direcciones cartesianas si se tiene

   a) 1) Un sistema en el estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$.

   2) Un sistema en el estado mixto $\rho = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|)$.

   b) 1) Un sistema en el estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|-\rangle$.

   2) Un sistema en el estado mixto $\rho = \frac{1}{3}\,|+\rangle\langle+| + \frac{2}{3}\,|-\rangle\langle-|$.

   donde $\{|+\rangle\,, |-\rangle\}$ son los autoestados de σ_z.

2. Sea ρ la matriz densidad que representa el estado de un sistema, y sea $\det(\rho)$ el determinante de dicha matriz.

   a) Muestre que si $\det(\rho) \neq 0$ entonces ρ representa un estado mixto.

   b) ¿Vale la afirmación recíproca? Esto es, ¿es posible asegurar la naturaleza de estado puro de un estado representado por una matriz densidad ρ con determinante nulo?

   c) Demostrar que para un estado puro se tiene que $\rho^2 = \rho$, y por lo tanto $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$.

   d) Demostrar que para un estado mixto, $\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1$.

3. Considere la matriz densidad ρ de un espacio de estados de dimensión 2, cuyos elementos están dados por

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \qquad \text{para todo } i, j \in \{1, 2\}$$

   y sea $\{|\psi_i\rangle\}$ la base elegida para representar al estado.

   a) Determinar si el estado representado por ρ es un estado mixto o un estado puro.

   b) Escribir los vectores $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ en términos de aquéllos vectores que conforman la base en la cual la matriz densidad es diagonal.

   c) ¿Es siempre posible diagonalizar la matriz densidad? Justifique su respuesta.

4. Para los siguientes sistemas de espín 1/2, escriba el operador densidad, y la matriz densidad en la base $\{|+\rangle\,, |-\rangle\}$.

   a) Un haz completamente polarizado con S_z+.

   b) Un haz completamente polarizado con S_x+.

   c) Un haz no polarizado, formado por una mezcla incoherente de S_x+ y S_x- en igual cantidad (50 %).

   d) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla incoherente con 75 % de S_z+ y 25 % de S_x+.

   Para los casos (c) y (d), calcule los valores medios estadísticos $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ y $\langle S_z\rangle$.

5. *a*) Pruebe que la evolución temporal del operador densidad ρ en el esquema de Schrödinger está dada por
$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0),$$
donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal.
   b) A partir de la ecuación de Schrödinger para el operador $U(t, t_0)$, encuentre la ecuación de Schrödinger para el operador densidad. ¿Cuál es la diferencia fundamental con la correspondiente ecuación de Heisenberg?
   c) Suponga que a $t = 0$ tiene un estado puro. Muestre que el estado no puede evolucionar a uno mixto si la evolución temporal está prescripta por la ecuación de Schrödinger.

6. Considere un sistema de espín 1/2.

   a) Muestre que la matriz densidad puede ser escrita en la forma
$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right),$$
donde $\mathbb{I}$ es el operador identidad, y $\boldsymbol{P}$ es un vector.
   b) Calcule $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$. ¿Cuál es la interpretación física del vector $\boldsymbol{P}$?
   c) En presencia de un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, el Hamiltoniano del sistema es
$$H = -\left(\frac{eB}{mc}\right)S_z.$$
Encuentre la ecuación de evolución para $\boldsymbol{P}$. Interprete el resultado.

7. Se fabrican dos haces parcialmente polarizados de partículas de espín 1, según las siguientes proporciones:

   a) 50 % $|1, 1\rangle_z$, 50 % $|1, -1\rangle_z$,
   b) 50 % $|1, 1\rangle_x$, 50 % $|1, -1\rangle_x$,

   donde se usó la notación $\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,|j, m\rangle_{\hat{\boldsymbol{n}}} = m\hbar\,|j, m\rangle_{\hat{\boldsymbol{n}}}$. Muestre que ambos dan el mismo $\langle\boldsymbol{S}\rangle$, pero que las matrices densidad son distintas. Diseñe un experimento que permita distinguirlos.

8. Se colocan dos Stern-Gerlach en serie, el segundo rotado un ángulo α respecto al primero. Incide un haz de partículas no polarizado de espín 1. ¿Qué fracción de éste atravesará el sistema sin desviarse?

9. Considere un sistema compuesto por dos espines 1/2 descrito por el estado singlete $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle\right)$.

   a) ¿Es el estado del sistema puro o mixto? Justifique.
   b) ¿Es el estado del sistema entrelazado? Justifique.
   c) Calcule la matriz densidad reducida para la partícula 1 y 2. ¿Es el estado de cada subsistema puro o mixto?

10. Considere un sistema compuesto por dos subsistemas de espín 1/2 en el estado singlete, $|\psi\rangle_{AB}$. Estamos interesados en conocer los valores medios de las mediciones del espín en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ y $\hat{\boldsymbol{z}}$ para la primer partícula independientemente del estado de la segunda. Comprueben que el resultado obtenido con la fórmula $\langle\psi|\,S_i^{(A)}\otimes\mathbb{I}^{(B)}\,|\psi\rangle$ es el mismo que utilizando $\mathrm{Tr}(S_i\rho_A)$, donde ρ_A es la matriz densidad reducida de la primer partícula: $\rho_A = \mathrm{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB})$.

11. Se define la pureza de un estado ρ como $\mathrm{Tr}\left(\rho^2\right)$. Considere el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{+}\rangle + |{+}{-}\rangle\right)$.

   a) Calcule la pureza del estado $|\psi\rangle$.

   b) Si se toma la traza parcial sobre el primer subsistema, calcule la pureza del segundo subsistema.

   c) Si se toma la traza parcial sobre el segundo subsistema, calcule la pureza del primer subsistema.

   d) Puede escribirse $|\psi\rangle$ como un estado producto?

   Repita los puntos anteriores para el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle\right)$.

12. Considere un sistema compuesto por dos espines 1/2. Inicialmente el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi_0\rangle = |+\rangle \otimes \frac{(|+\rangle + |-\rangle)}{\sqrt{2}}.$$

   El sistema evoluciona según un Hamiltoniano tal que la evolución temporal durante un tiempo T genera la transformación unitaria

$$U = \mathbb{I} \otimes |+\rangle\langle+| + e^{-i\sigma_y \pi/2} \otimes |-\rangle\langle-|\,.$$

   a) Calcule la matriz densidad reducida del primer subsistema y su respectiva pureza para el estado inicial. ¿El estado reducido es puro o mixto?

   b) Verifique que U es unitaria.

   c) Calcule el estado evolucionado, $|\psi\rangle = U\,|\psi_0\rangle$.

   d) Calcule la matriz densidad reducida del primer subsistema y su respectiva pureza para el estado final. ¿El estado reducido es puro o mixto?

   e) Si se mira la evolución temporal del primer subsistema por sí solo, ¿puede la evolución temporal corresponder a una transformación unitaria? ¿Por qué?