Desigualdad de Bell

Supongamos que A puede medir dos propiedades, A y A', cuyos resultados a y a' sólo toman los valores $+1$ y -1. De la misma manera B puede medir las propiedades B y B', cuyos resultados b y b' toman los valores $+1$ o -1.

Un ejemplo serían las mediciones de $\boldsymbol{S_1} \cdot \hat{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{S_1} \cdot \hat{\boldsymbol{a}}'$, $\boldsymbol{S_2} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}$, $\boldsymbol{S_2} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}'$ (divididos por $\frac{\hbar}{2}$). Antes consideramos sólo el caso que A y A' eran S_z o S_x. Ahora son genéricos.

Digamos que A mide A' y B mide B, y nos interesa el producto $A'B$. Hay cuatro combinaciones posibles, dos dan $A'B = +1$ y dos $A'B = -1$. El valor medio de $A'B$ se mide:

$$E(A'B) = \frac{N_{++} + N_{--} - N_{+-} - N_{-+}}{N_{++} + N_{--} + N_{+-} + N_{-+}}$$

Si las mediciones lo único que hacen es revelar los valores preexistentes de a, a', b, b', la frecuencia de estados finales está dada por 16 probabilidades, $p(a, a', b, b')$, cuyos valores dependerán del problema (proceso de preparación de S, su evolución, etc):

$$E(A'B) = \sum_{aa'bb'} p(a, a', b, b')\; a'b$$

Desigualdad de Bell

En total hay cuatro pares de mediciones posibles: $AB,\ AB',\ A'B,\ A'B'$, cuyos valores medios son:

$$E(AB) = \sum_{aa'bb'} p(a,a',b,b')\ a\,b$$

$$E(A'B) = \sum_{aa'bb'} p(a,a',b,b')\ a'b$$

$$E(A'B') = \sum_{aa'bb'} p(a,a',b,b')\ a'b'$$

$$E(AB') = \sum_{aa'bb'} p(a,a',b,b')\ a\,b'$$

Para calcular estos valores medios necesitamos las probabilidades $p(a,a',b,b')$ que dependen de los detalles de la teoría real local.

Pero es interesante la combinación:

$$S = E(AB) + E(A'B) + E(A'B') - E(AB') \ = \sum_{aa'bb'} p(a,a',b,b')\ (ab + a'b + a'b' - ab')$$

Desigualdad de Bell

$$S = E(AB) + E(A'B) + E(A'B') - E(AB') \;=\; \sum_{aa'bb'} p(a,a',b,b')\;(ab + a'b + a'b' - ab')$$

$$S = E(AB) + E(A'B) + E(A'B') - E(AB') \;=\; \sum_{aa'bb'} p(a,a',b,b')\;\left[(a'+a)\,b + (a'-a)\,b'\right]$$

El corchete dentro de la suma sólo puede valer $+2$ o -2.

En efecto, entre $(a'+a)$ y $(a'-a)$ uno tiene que valer 2 y el otro 0.

$$S \;\leq\; \sum_{aa'bb'} p(a,a',b,b') \times (+2) \;=\; +2$$

$$S \;\geq\; \sum_{aa'bb'} p(a,a',b,b') \times (-2) \;=\; -2$$

Desigualdad de Bell:

$$\boxed{\;|\,S\,| \;\leq\; 2\;}$$