El acoplamiento spin-órbita

El electrón se mueve en el campo electrostático $\boldsymbol{E}$ creado por el protón. En su sistema de referencia ve un campo $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v} \times e\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{e}{mc^2}\,\frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \frac{e}{mc^2}\,\frac{\boldsymbol{L}}{r^3}$$

que se acopla con $\boldsymbol{\mu}_e$

$$V_{\mathrm{SO}} \;=\; -\boldsymbol{\mu}_e\,.\,\boldsymbol{B} \;=\; -\frac{q}{m}\,\boldsymbol{S}\,.\,\frac{e}{mc^2}\,\frac{\boldsymbol{L}}{r^3} \;=\; \frac{e^2}{m^2c^2}\,\frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{L}\,.\,\boldsymbol{S}$$

Otra manera de describirlo es como la energía de acoplamiento entre $\boldsymbol{\mu}_e$ y el campo magnético que ve el electrón que le genera el protón al dar vueltas en torno suyo.

La precesión de Thomas hace agregar un $\frac{1}{2}$ relativista, debido a que el sistema de referencia del electrón no es inercial sino rotante.

Corrección relativista a la energía cinética

La energía cinética relativista se desarrolla en potencias de v/c :

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = mc^2\left[1+\frac{p^2}{m^2c^2}\right]^{\frac{1}{2}} \simeq mc^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2}-\frac{1}{8}\frac{p^4}{m^4c^4}\right] = mc^2+\frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3c^2}+\cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$$

La corrección a primer orden relativista a la energía cinética es entonces

$$V_{\mathrm{C}} = -\frac{P^4}{8\,m^3c^2}$$

El hamiltoniano de estructura fina

$$\boxed{H_{\mathsf{f}} = -\frac{P^4}{8\,m^3c^2} + \frac{e^2}{2\,m^2c^2}\,\frac{1}{R^3}\,\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} + \frac{\pi e^2\hbar^2}{2\,m^2c^2}\,\delta(R)}$$

El Hamiltoniano de estructura hiperfina

El potencial y campo creado por el dipolo magnético $\boldsymbol{\mu_p}$ del protón (Jackson 5.64):

$$\boldsymbol{A_p}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{\mu_p}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad\qquad \boldsymbol{B_p}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{A_p} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\,\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\mu_p})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu_p}}{r^3} + \frac{8\pi}{3}\,\boldsymbol{\mu_p}\,\delta(\boldsymbol{r})\right]$$

El hamiltoniano del electrón en presencia de $\boldsymbol{A_p}$ y $\boldsymbol{B_p}$:

$$H \;=\; \tfrac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P} - q\,\boldsymbol{A_p}\right)^2 - \boldsymbol{\mu_e}\cdot\boldsymbol{B_p} \;\simeq\; \tfrac{1}{2m}P^2 - \tfrac{q}{2m}\left(\boldsymbol{P}\,.\,\boldsymbol{A}_p + \boldsymbol{A}_p\,.\,\boldsymbol{P}\right) - \boldsymbol{\mu_e}\cdot\boldsymbol{B_p}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\,.\,\boldsymbol{A}_p + \boldsymbol{A}_p\,.\,\boldsymbol{P} \;&=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\boldsymbol{P}\,.\,(\boldsymbol{\mu}_p\times\boldsymbol{R})\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3}(\boldsymbol{\mu}_p\times\boldsymbol{R})\,.\,\boldsymbol{P}\right] \\
&=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\,\boldsymbol{\mu}_p\,.\,(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{R})\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P})\,.\,\boldsymbol{\mu}_p\right] \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,2\,\frac{\boldsymbol{\mu}_p\,.\,\boldsymbol{L}}{R^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{H_{\text{hf}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{q}{m\,R^3}\,\boldsymbol{\mu_p}\cdot\boldsymbol{L} + \left[\frac{3\,(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\mu_e})\,(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\mu_p})}{R^5} - \frac{\boldsymbol{\mu_e}\cdot\boldsymbol{\mu_p}}{R^3}\right] + \frac{8\pi}{3}\,\boldsymbol{\mu_e}\cdot\boldsymbol{\mu_p}\,\delta(R)\right\}}$$

Visión alternativa del primer término de H_{hf}

El $\boldsymbol{B}$ que genera en el origen una carga q ubicada en $\boldsymbol{r}$ con velocidad $\boldsymbol{v}$ (Jackson 5.5)

$$\boldsymbol{B} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{r}\times q\,\boldsymbol{v}}{r^3} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q}{m}\,\frac{\boldsymbol{r}\times m\,\boldsymbol{v}}{r^3} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q}{m}\,\frac{\boldsymbol{L}}{r^3}$$

Este es el campo magnético que por su movimiento genera el electrón en el núcleo.

La energía asociada por su acoplamiento con $\boldsymbol{\mu}_p$:

$$V = -\boldsymbol{\mu}_p\,.\,\boldsymbol{B} \;=\; -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q}{m\,R^3}\,\boldsymbol{\mu}_p\,.\,\boldsymbol{L}$$

Momento magnético e impulso angular

Toda partícula con masa y carga que realiza un movimiento circular tiene asociado un impulso angular y un momento magnético $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\times q\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{q}{2m}\int \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{q}{2m}\,\boldsymbol{L}$$

La ecuación de Dirac predice que $\boldsymbol{\mu}_e$ es el doble de la relación clásica. La del protón es $g_p = 2.7928$ mayor que lo esperado para $s=\frac{1}{2}$, pero no es una partícula elemental.

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m}\,\boldsymbol{L} \qquad \boldsymbol{\mu}_e = \frac{q_e}{m_e}\,\boldsymbol{S}_e \qquad \boldsymbol{\mu}_p = g_p\,\frac{q_p}{m_p}\,\boldsymbol{S}_p$$