Coeficientes de Clebsch-Gordan

Vamos a expresar la base $\{|j_1 j_2\, jm\rangle\}$ de autoestados de $\{J_1^2,\, J_2^2,\, J^2,\, J_z\}$

en términos de la base $\{|j_1 j_2, m_1 m_2\rangle\}$ de autoestados de $\{J_1^2,\, J_2^2,\, J_{1z},\, J_{2z}\}$

$$
\begin{aligned}
|j_1 j_2\, jm\rangle &= \sum |j_1 j_2, m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2, m_1 m_2 \,|\, j_1 j_2\, jm\rangle \\
&= \sum |j_1 j_2, m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2, m_1 m_2 \,|\, jm\rangle \qquad \leftarrow \text{ notación abreviada}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_z &= J_{1z} + J_{2z} \\
\langle j_1 j_2, m_1 m_2 \,|\, J_z \,|\, j_1 j_2\, jm\rangle &= \langle j_1 j_2, m_1 m_2 \,|\, (J_{1z} + J_{2z}) \,|\, j_1 j_2\, jm\rangle \\
m\,\hbar\, \langle j_1 j_2, m_1 m_2 \,|\, j_1 j_2\, jm\rangle &= (m_1 + m_2)\, \hbar\, \langle j_1 j_2, m_1 m_2 \,|\, j_1 j_2\, jm\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\langle j_1 j_2, m_1 m_2 \,|\, jm\rangle = 0 \qquad (\text{si } \; m \neq m_1 + m_2)}
$$

Relación de recurrencia de los coeficientes de Clebsch-Gordan

Aplicamos el operador de subida $J_+ = J_{1+} + J_{2+}$ a ambos lados a :

$$|j_1 j_2\, jm\rangle = \sum_{m_1', m_2'} |j_1 j_2, m_1' m_2'\rangle \langle j_1 j_2, m_1' m_2' \,|\, jm\rangle$$

$$J_+ |j_1 j_2\, jm\rangle = \sum_{m_1', m_2'} (J_{1+} + J_{2+}) |j_1 j_2, m_1' m_2'\rangle \langle j_1 j_2, m_1' m_2' \,|\, jm\rangle$$

$$\begin{aligned}\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, |j_1 j_2\, j\, m{+}1\rangle = \sum_{m_1', m_2'} & \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1'(m_1'+1)}\, |j_1 j_2, m_1'{+}1\, m_2'\rangle \langle j_1 j_2, m_1' m_2' \,|\, jm\rangle \\ & + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2'(m_2'+1)}\, |j_1 j_2, m_1'\, m_2'{+}1\rangle \langle j_1 j_2, m_1' m_2' \,|\, jm\rangle\end{aligned}$$

$\langle j_1 j_2, m_1 m_2| \longrightarrow$

$$\begin{aligned}\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, \langle j_1 j_2, m_1 m_2 | j\, m{+}1\rangle = & \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\, \langle j_1 j_2, m_1{-}1\, m_2 \,|\, jm\rangle \\ & + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)}\, \langle j_1 j_2, m_1\, m_2{-}1 \,|\, jm\rangle\end{aligned}$$

Análogamente aplicando $J_- = J_{1-} + J_{2-}$, resultan las relaciones de recurrencia:

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\, \langle j_1 j_2, m_1 m_2 \,|\, j\, m{\pm}1\rangle = & \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1\mp1)}\, \langle j_1 j_2, m_1{\mp}1\, m_2 \,|\, jm\rangle \\ & + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2\mp1)}\, \langle j_1 j_2, m_1\, m_2{\mp}1 \,|\, jm\rangle\end{aligned}}$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan

Usamos la relación de recurrencia con $j,\, j_1, j_2$ fijo :

$$\sqrt{j(j{+}1)-m(m{+}1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1 m_2 | j\, m{+}1\rangle = \sqrt{j_1(j_1{+}1)-m_1(m_1\text{-}1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1{-}1\, m_2\,|jm\rangle$$
$$+\sqrt{j_2(j_2{+}1)-m_2(m_2\text{-}1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1\, m_2{-}1\,|jm\rangle$$

$m = j$:

$$\sqrt{j_1(j_1{+}1)-m_1(m_1\text{-}1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1{-}1\, m_2\,|\,j\,j\,\rangle = -\sqrt{j_2(j_2{+}1)-m_2(m_2\text{-}1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1\, m_2\text{-}1\,|\,j\,j\,\rangle$$

$m_2 = j - m_1 + 1$: (m_2 no es independiente de m_1)

$$\sqrt{j_1(j_1{+}1)-m_1(m_1\text{-}1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1\text{-}1\, j\text{-}m_1{+}1\,|\,j\,j\,\rangle = -\sqrt{j_2(j_2{+}1)-(j\text{-}m_1{+}1)(j\text{-}m_1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1\, j\text{-}m_1\,|\,j\,j\,\rangle$$

$m_1 = j_1$: dado $\langle j_1\, j_2,\, j_1\, j\text{-}j_1\,|\,j\,j\,\rangle$ permite calcular $\langle j_1\, j_2,\, j_1\text{-}1\;\; j\text{-}j_1{+}1\,|\,j\,j\,\rangle$

$m_1 = j_1\text{-}1$: dado $\langle j_1\, j_2,\, j_1\text{-}1\, j\text{-}j_1{+}1\,|\,j\,j\,\rangle$ permite calcular $\langle j_1\, j_2,\, j_1\text{-}2\;\; j\text{-}j_1{+}2\,|\,j\,j\,\rangle$

$m_1 = j_1\text{-}2$: dado $\langle j_1\, j_2,\, j_1\text{-}2\, j\text{-}j_1{+}2\,|\,j\,j\,\rangle$ permite calcular $\langle j_1\, j_2,\, j_1\text{-}3\;\; j\text{-}j_1{+}3\,|\,j\,j\,\rangle\;\cdots$

Coeficientes de Clebsch-Gordan

Una vez calculados todos los $\langle j_1\, j_2, m_1\, m_2\,|\, j\, j\,\rangle$ a partir de $\langle j_1\, j_2,\, j_1\, j\text{-}j_1\,|\, j\, j\,\rangle$,

la relación de recurrencia

$$\sqrt{j(j+1)-m(m\text{-}1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1 m_2\,|\, j\, m\text{–}1\rangle = \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1\text{+}1\, m_2\,|\, jm\rangle$$
$$+ \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2+1)}\,\langle j_1\, j_2, m_1\, m_2\text{+}1\,|\, jm\rangle$$

permite obtener los $\langle j_1\, j_2, m_1 m_2\,|\, j\, j\text{–}1\rangle$ a partir de $\langle j_1\, j_2, m_1 m_2\,|\, j\, j\,\rangle$

los $\langle j_1\, j_2, m_1 m_2\,|\, j\, j\text{–}2\rangle$ a partir de $\langle j_1\, j_2, m_1 m_2\,|\, j\, j\text{–}1\rangle$

los $\langle j_1\, j_2, m_1 m_2\,|\, j\, j\text{–}3\rangle$ a partir de $\langle j_1\, j_2, m_1 m_2\,|\, j\, j\text{–}2\rangle \cdots$

O sea todos los CG se obtienen a partir de $\langle j_1\, j_2,\, j_1\, j\text{-}j_1\,|\, j\, j\,\rangle$ que es nulo salvo si:

$$-j_2 \le j-j_1 \le j_2 \qquad \Longrightarrow \qquad j_1-j_2 \le j \le j_1+j_2$$

Si hubiesemos elegido $m_1 = j-m_2+1$ en vez de $m_2 = j-m_1+1$ tendríamos:

$$-j_1 \le j-j_2 \le j_1 \qquad \Longrightarrow \qquad j_2-j_1 \le j \le j_2+j_1$$

Combinando ambas: $\boxed{|j_1-j_2| \le j \le j_1+j_2}$