

“A theory with mathematical beauty is more likely to be correct than an ugly one that fits some experimental data.” - Paul Dirac.

1 Un sistema de dimensión 2 está en un autoestado de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ (ver ejercicio 7 de la guía 1) con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z .

(a) Si se mide S_z , ¿cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$? Verifique que los casos $\gamma = 0, \pi/2$ tienen sentido. Responder la misma pregunta si lo que se mide es S_x .

(b) Suponer ahora que al realizar una medición de S_x se obtuvo el valor $-\hbar/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir S_z inmediatamente después se obtenga también $-\hbar/2$?

2 El espacio de estados de cierto sistema físico se puede describir con un espacio de Hilbert de dimensión 3, siendo $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ una base ortonormal. En dicha base el hamiltoniano H del sistema y dos observables A y B están dados por

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

donde ω_0 , a , y b son constantes positivas. A $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$.

(a) A $t = 0$ se mide la energía del sistema. ¿Qué valores pueden encontrarse y con qué probabilidad? Calcular $\langle H \rangle$ y $\langle \Delta H \rangle$ para el estado $|\psi(0)\rangle$.

(b) Si a $t = 0$ en lugar de medir H se mide A , ¿qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidad? ¿Cuál es el vector de estado inmediatamente después de la medición? Repetir el cálculo si en lugar de A se mide B .

(c) Si a $t = 0$ no se realiza medición alguna, hallar $|\psi(t)\rangle$. Repetir el cálculo si a $t = 0$ se midió: (i) H , (ii) A , o (iii) B . Discutir, en cada caso, qué resultados se obtendrían si se midiesen A , B o H al instante t .

3 Efecto Zeno-Cuántico (Paradoja de Turing)

Una de las clásicas paradojas de Zeno (450 a.c.), llamada paradoja del arquero, plantea la situación de una flecha en movimiento que es observada en cada instante de tiempo. Si en cada instante la flecha se encuentra en una posición determinada, entonces no puede moverse en dicho instante. Si el tiempo está formado por instantes entonces la flecha nunca puede moverse. Esta idea es contraria a nuestra concepción de movimiento en mecánica clásica. Sin embargo, el siguiente ejercicio muestra que, en mecánica cuántica, la descripción de Zeno sobre el movimiento de la flecha tiene una gran dosis de verdad: *el estado de un sistema cuántico no puede evolucionar si estamos “mirando” al sistema continuamente.*¹

(a) Considere un sistema cuántico que a tiempo $t = 0$ se encuentra en un autoestado $|\phi\rangle$ de autovalor λ de cierto observable O y evoluciona de acuerdo a un hamiltoniano H . Si a tiempo $t > 0$ se mide el observable O , muestre que la probabilidad de obtener autovalores distintos a λ es proporcional a t^2 para tiempos suficientemente chicos.

¹Este efecto ha sido comprobado experimentalmente - ver, por ejemplo: Leibfried, D.; Blatt, R.; Monroe, C.; Wineland, D. (2003). “Quantum dynamics of single trapped ions”. Reviews of Modern Physics. **75**: 281.

- (b) Ahora medimos N veces O , a intervalos de tiempo equiespaciados $\Delta t = 1/N$ entre $t = 0$ y $t = 1s$. Muestre que en el límite en que se observa al sistema permanentemente, $N \rightarrow \infty$, la probabilidad de obtener cualquier estado ortogonal a $|\phi\rangle$ a $t = 1s$ tiende a cero.

- [4] Sean $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$ autoestados del hamiltoniano H con autovalores E_1 y E_2 respectivamente. A $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi_1\rangle = a_1 |\varphi_1\rangle + a_2 |\varphi_2\rangle$. Muestre que el valor medio de un operador B arbitrario varía armónicamente en el tiempo con frecuencia $\nu = |E_2 - E_1|/h$. Note que el período de esta oscilación satisface $|E_2 - E_1| \tau = h$.

[5] Oscilaciones de neutrinos

En este problema vamos a calcular la probabilidad de transición entre neutrinos de distinto sabor². Por simplicidad, vamos a considerar solamente dos sabores de neutrinos, ν_e y ν_μ .

Los estados de masa $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$ son los autoestados del hamiltoniano libre, esto es

$$H|\nu_i(\mathbf{p})\rangle = E_i(\mathbf{p})|\nu_i(\mathbf{p})\rangle, \quad E_i(\mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 + m_i^2$$

En las interacciones débiles, los neutrinos se producen siempre con un sabor definido (autoestados de sabor). Dichos autoestados de sabor $|\nu_e\rangle$ y $|\nu_\mu\rangle$ se pueden escribir en términos de los autoestados de masa

$$|\nu_e\rangle = \cos(\theta)|\nu_1(\mathbf{p})\rangle + \sin(\theta)|\nu_2(\mathbf{p})\rangle, \quad (1)$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin(\theta)|\nu_1(\mathbf{p})\rangle + \cos(\theta)|\nu_2(\mathbf{p})\rangle. \quad (2)$$

- (a) Considerando que la evolución temporal de los estados está dada por H , hallar la probabilidad de encontrar un neutrino muónico a tiempo $t > 0$ si a $t = 0$ se tenía un neutrino electrónico.
- (b) Debido a que los neutrinos son partículas ultrarrelativistas, es posible aproximar $E_i(\mathbf{p}) - E_j(\mathbf{p}) \simeq \frac{1}{2} \frac{m_i^2 - m_j^2}{|\mathbf{p}|}$. Reescriba la probabilidad hallada en el inciso anterior en término de la “diferencia de masas” $\Delta m^2 \doteq m_2^2 - m_1^2$. Verificar que si la diferencia de masas es nula, entonces el fenómeno de oscilación de neutrinos no existe (la determinación experimental de estas oscilaciones permitió concluir que los neutrinos debían tener masa).

[6] Precesión del espín

El hamiltoniano de un sistema de espín $1/2$ en un campo magnético externo uniforme B en la dirección z está dado por

$$H = - \left(\frac{eB}{mc} \right) S_z = -\omega S_z.$$

- (a) Verificar que los autoestados de S_z $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son también autoestados de la energía, y calcular los correspondientes autovalores.
- (b) Suponer que a $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ (que corresponde al estado $|S_x, +\rangle$). Hallar la evolución temporal $|\alpha(t)\rangle$ de dicho estado. ¿Qué resultados pueden obtenerse al medir S_x a un tiempo posterior? ¿Con qué probabilidades?

²Los neutrinos son partículas pertenecientes a la familia de los *leptones*, con carga nula y se creían no masivos. Hoy se conocen tres familias distintas (sabores) de neutrinos: electrónicos, muónicos y tauónicos (ν_e , ν_μ y ν_τ). Los experimentos llevados a cabo actualmente con neutrinos de distinta naturaleza (solares, atmosféricos) presentan fuertes evidencias a favor de la existencia de oscilaciones de neutrinos, es decir, de transiciones entre neutrinos de distintos sabores causadas por la presencia de masas y *mezclas*. La existencia de estas oscilaciones implica que dado un neutrino de un determinado sabor, ν_α , que se produce en algún proceso de interacción débil, a una distancia suficientemente larga de la fuente de producción, la probabilidad de encontrar un neutrino de un sabor diferente, ν_β , es no nula.

(c) Calcular el valor de expectación $\langle S_x \rangle$ en función del tiempo (*precesión del espín*).

(d) Encontrar (como función de t) el versor $\hat{\mathbf{n}}$ tal que $|\alpha(t)\rangle$ es autoestado del operador $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t)$.

7 Derivar nuevamente la precesión del espín (ver ejercicio anterior) pero utilizando ahora la representación de Heisenberg.

8 Demostrar que el valor de expectación de un observable A en el estado $|\psi(t)\rangle$ satisface

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle .$$

(a) Derivar el teorema de Ehrenfest a partir de este resultado.

(b) Utilizar esta fórmula para hallar nuevamente la precesión del espín (ver ejercicio 5).

9 Considere un paquete de ondas correspondiente a la partícula libre unidimensional. A t_0 este satisface la relación de incerteza mínima

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle \langle (\Delta P)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \quad (t = t_0).$$

(a) Muestre, aplicando el teorema de Ehrenfest, que $\langle X \rangle$ es una función lineal del tiempo, mientras que $\langle P \rangle$ permanece constante.

(b) Escriba e integre las ecuaciones de movimiento para $\langle X^2 \rangle$ y $\langle \{X, P\} \rangle$.

(c) Muestre que tomando $t_0 = 0$, se satisface la relación

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle = \frac{\langle (\Delta P)_0^2 \rangle}{m^2} t^2 + \langle (\Delta X)_0^2 \rangle ,$$

donde $\langle (\Delta X)_0^2 \rangle$ y $\langle (\Delta P)_0^2 \rangle$ son las dispersiones en el instante $t_0 = 0$. Ayuda: tenga en cuenta el principio de incerteza de Schrodinger (ver ejercicio 22 de la guía 1). ¿Cómo varía el ancho del paquete en función del tiempo? Interprete el resultado.

10 Sea $X(t)$ el operador coordenada para una partícula libre en una dimensión en el esquema de Heisenberg. Calcule en función del tiempo

$$[X(t), X(0)] .$$

11 Considere una partícula en un potencial unidimensional $V(X) = -kX$ (por ejemplo, puede corresponder a un campo gravitatorio o a un campo eléctrico uniforme).

(a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y el momento P de la partícula. Integre las ecuaciones y compare con el resultado clásico.

(b) Muestre que la dispersión $\langle (\Delta P)^2 \rangle$ no varía en el tiempo.

(c) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación de momentos. Deduzca luego una relación entre $\partial_t |\psi(p, t)|^2$ y $\partial_p |\psi(p, t)|^2$. Integre la ecuación e interprete.

12 Muestre que el estado físico de una partícula sin espín está completamente especificado por la densidad de probabilidad $\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ y la corriente de probabilidad

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} (\psi^* \nabla \psi) ,$$

donde Im denota la parte imaginaria de la expresión entre paréntesis. Para ello, asuma la función de onda $\psi(\mathbf{r})$ conocida y con argumento $\xi(\mathbf{r})$,

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\xi(\mathbf{r})}.$$

Muestre que

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \rho(\mathbf{r}) \nabla \xi(\mathbf{r}).$$

Deduzca que dos funciones de onda con la misma densidad $\rho(\mathbf{r})$ y corriente $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ solo pueden diferir en una fase global (independiente de $\mathbf{r}$).

- [13] Mostrar que la corriente de probabilidad del ejercicio anterior, junto con la densidad de probabilidad ρ , satisfacen la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

para toda solución de la ecuación de Schrodinger. Interprete.

- [14] Sea $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ la corriente de probabilidad asociada a la función de onda $\psi(\mathbf{r})$ que describe el estado de una partícula de masa m en tres dimensiones.

(a) Muestre que

$$m \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r = \langle \mathbf{p} \rangle.$$

(b) Considere el operador $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Muestre que

$$m \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r = \langle \mathbf{L} \rangle.$$

- [15] Una caja conteniendo una partícula es dividida en dos compartimientos (izquierdo y derecho) a través de un separador fino. Si se sabe que la partícula está del lado derecho (izquierdo) con certeza, el estado se representa por el autoestado de posición $|R\rangle$ ($|L\rangle$), donde se han despreciado variaciones espaciales dentro de cada mitad de la caja. Considerando a $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ una base ortonormal, el vector de estado más general puede ser escrito como

$$|\alpha\rangle = |R\rangle \langle R|\alpha\rangle + |L\rangle \langle L|\alpha\rangle$$

La partícula puede *tunear* a través del separador; este efecto túnel es caracterizado por el hamiltoniano

$$H = \Delta (|L\rangle \langle R| + |R\rangle \langle L|)$$

donde Δ es un número real con dimensiones de energía.

- (a) Encuentre los autoestados de energía normalizados. ¿Cuáles son los autovalores de energía correspondientes?
- (b) En el esquema de Schrödinger los kets base $|R\rangle$ y $|L\rangle$ están fijos y el vector de estado varía con el tiempo. Suponga que el sistema está dado por el $|\alpha\rangle$ dado anteriormente a $t = 0$. Encuentre el vector de estado $|\alpha, t\rangle$ para un tiempo $t > 0$ aplicando a $|\alpha\rangle$ el operador de evolución temporal apropiado.
- (c) Suponga que a $t = 0$ la partícula está del lado derecho con certeza. ¿Cuál es la probabilidad de observar a la partícula en el lado izquierdo como función del tiempo?

- (d) Verifique que la solución a la ecuación de Schrödinger es el estado hallado en el punto (b), como debe ser.
- (e) Suponga que por error se escribió H como

$$H = \Delta |L\rangle \langle R|.$$

Resolviendo el problema de evolución temporal más general con este hamiltoniano, muestre que se viola la conservación de la probabilidad. ¿Qué propiedad/es no satisface este H y por qué esto implica la no conservación de la probabilidad?

16 Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

- (a) No es posible encontrar un operador T cuyo conmutador con el hamiltoniano H de un sistema sea $[T, H] = i\hbar$ si H está acotado por debajo (aclaración: esto nos dice que el operador tiempo no existe en mecánica cuántica).
- (b) Se tienen dos sistemas con hamiltonianos dados por $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ y $H' = \frac{(p+B)^2}{2m} + V(x)$. Si $\langle p \rangle$ es nulo en cada autoestado de H entonces también es nulo en cada autoestado de H' .

17 * **Lógica Cuántica** (fuera de programa, sólo por diversión!)

Este ejercicio muestra diferencias entre la mecánica cuántica y la clásica desde un punto de vista lógico. Una proposición A para un dado x puede tener valor “falso” o “verdadero” (0 o 1). La negación $\neg A$ es otra proposición que se cumple si no se cumple A y no se cumple si se cumple A . La proposición compuesta $A \wedge B$ se cumple si y sólo si se cumplen A y B . La proposición $A \vee B$, que se cumple si y sólo si se cumple A o se cumple B (o ambos) puede definirse a partir de las proposiciones anteriores utilizando la ley de Morgan

$$A \vee B \doteq \neg(\neg A \wedge \neg B).$$

Verifique que esta ley tiene sentido y que en la lógica usual se cumple la ley distributiva (lógica Booleana)

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

En mecánica cuántica, las proposiciones V corresponden naturalmente a subespacios del espacio de Hilbert. Un vector $|\psi\rangle$ satisface la proposición V si $|\psi\rangle \in V$ y no la satisface si $|\psi\rangle \perp V$, es decir, si $|\psi\rangle$ pertenece a la proposición opuesta $\neg V$ (que en el caso cuántico debe entenderse como el subespacio ortogonal $\neg V \equiv V^\perp$). En forma equivalente, las proposiciones se pueden asimilar a los proyectores ortogonales sobre estos subespacios, que tienen autovalor 1 o 0 para $|\psi\rangle \in V$ o $|\psi\rangle \in \neg V$, respectivamente. $V \wedge W$ es naturalmente el subespacio intersección $V \cap W$.

- (a) Utilizando la ley de Morgan para definir $V \vee W$ (proposición “V o W”) mostrar que $V \vee W$ es el espacio $V \oplus W$.
- (b) Verificar que la lógica cuántica no es distributiva.