"Nature isn't classical, dammit, and if you want to make a simulation of nature, you'd better make it quantum mechanical (...)" - Richard Feynman.

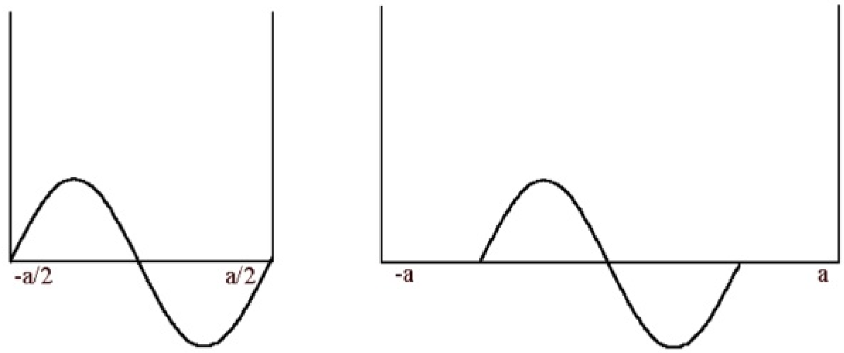
---

1 Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) En problemas unidimensionales, el espectro de estados ligados es siempre no degenerado.

(b) Si $V(x)$ es un potencial unidimensional par, entonces los autoestados de energía tienen paridad definida (es decir, o son pares o son impares).

2 A tiempo $t = 0$ se tiene una partícula de masa m en el primer estado excitado de un pozo cuadrado infinito de ancho a. Instantáneamente, a $t = 0$ se expande el pozo de forma simétrica de modo que su ancho pasa a ser $2a$.



(a) Calcular el valor medio de la energía antes y después de la expansión del pozo.

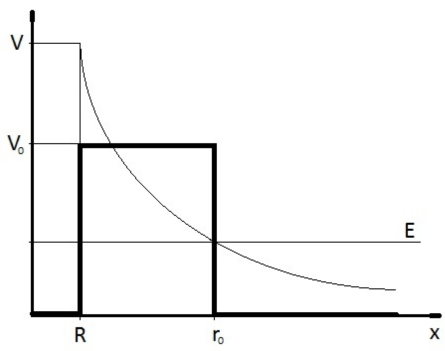
(b) Hallar la evolución temporal del sistema para $t > 0$.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de medir un valor de energía menor al que tenía el sistema inicialmente, a un tiempo $t > 0$?

3 * **Vida media del Bismuto**

El isótopo radiactivo $_{83}Bi^{212}$ decae a $_{81}Tl^{208}$ emitiendo una partícula α de energía $E = 6{,}0$ MeV. En este problema, estimaremos la vida media de este isótopo del Bismuto.

Para ello, consideraremos que el $_{83}Bi^{212}$ está formado por una partícula α (He^{2+}) y un núcleo de $_{81}Tl^{208}$. El decaimiento se dará cuando la partícula α "atraviese" el potencial electrostático efectivo al que se encuentra sometida por la presencia del $_{81}Tl^{208}$.



(a) El primer paso consiste en realizar una aproximación del potencial electrostático por una barrera cuadrada unidimensional (ver figura). Calcule valores apropiados para los parámetros de la barrera (r_0, V_0 y V), teniendo en cuenta que el radio del Talio es $R = 6 \times 10^{-13}$ cm.

(b) Obtenga una expresión para el coeficiente de trasmisión T de una barrera de potencial cuadrada.

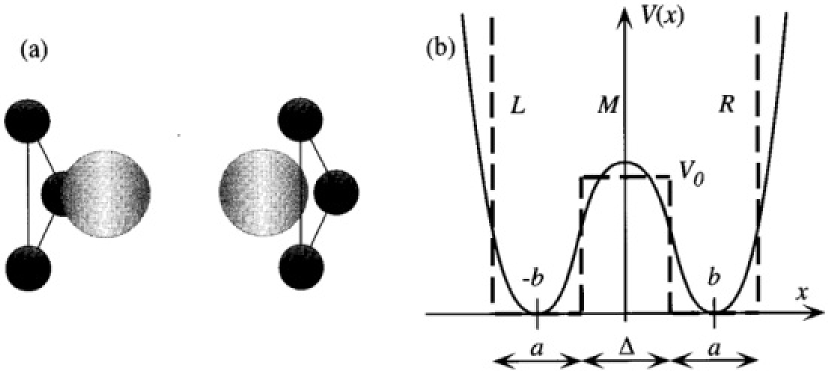
(c) Demuestre que una estimación para la vida media viene dada por

$$\tau \approx \frac{2R}{vT} \tag{1}$$

donde v es la velocidad de la partícula α ($v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$). Calcule la vida media y compare con el valor experimental $\tau = 1$ h.

$\boxed{4}$ *** Inversión del Nitrógeno**

La molécula de amoníaco (NH_3) tiene forma de pirámide, donde los átomos de H forman una base triangular y el átomo de N se encuentra en la cúspide. Existe un proceso conocido como "inversión del Nitrógeno" en el que la pirámide se invierte tal como se muestra en la figura (a). Un modelo muy simple para este fenómeno considera un potencial unidimensional $V(x)$, donde x es la posición de una partícula ficticia de masa $M = 3m_H$, que simula el movimiento rígido de la base de la pirámide. La línea continua de la figura (b) corresponde a $V(x)$, siendo el origen la posición del átomo de N, que se supone estático. Simplificaremos aún más el potencial, utilizando un pozo de paredes impenetrables de ancho $2a + \Delta$ en cuyo centro se encuentra una barrera de altura V_0 y ancho Δ (línea punteada). Para el caso del amoníaco, se tiene $a = 0{,}3\mathring{A}$, $\Delta = 0{,}3\mathring{A}$ y $V_0 = 0{,}25eV$. Analizaremos los estados con $E < V_0$.



(a) Teniendo en cuenta la simetría de $V(x)$ y las condiciones de contorno, grafique las funciones de onda $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, correspondientes a los dos autoestados de menor energía, suponiendo que en ambos casos $E < V_0$. Encuentre $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, a menos de la constante de normalización.

(b) Mostrar que la energía se obtiene de las siguientes expresiones: $\tan(ka) = -\frac{k}{q}\coth(q\Delta/2)$ para el estado fundamental y $\tan(ka) = -\frac{k}{q}\tanh(q\Delta/2)$ para el primer estado excitado (donde $k = \sqrt{2ME}/\hbar$ y $q = \sqrt{2M(V_0 - E}/\hbar)$.

(c) Aproximar las expresiones del punto anterior para el caso en que $E \ll V_0$ y que $q\Delta \gg 1$ y obtener las energías de ambos autoestados ($q \approx \sqrt{2MV_0}/\hbar$). En particular, mostrar que la diferencia de energía entre ambos niveles es

$$E_2 - E_1 \approx \frac{\hbar^2\pi^2}{2Ma^2}\frac{4e^{-q\Delta}}{qa}\,.$$

Calcular esta cantidad y comparar con el valor experimental $E_2 - E_1 = 9{,}84 \times 10^{-5}eV$

(d) Suponer que a $t = 0$ la probabilidad de encontrar a la partícula ficticia está concentrada en el lado izquierdo del pozo. Encontrar una función de onda combinación lineal de ϕ_1 y ϕ_2 que describa esta situación. Calcular a qué tiempo T la máxima probabilidad de encontrar a la partícula está del lado derecho del pozo y determinar la frecuencia de inversión.

5 * **Dimensiones extra**
Considerar una partícula moviéndose en dos dimensiones (x, y), en un pozo de potencial que es infinito en todos lados salvo para x entre 0 y L (para todo y), donde vale 0. La dimensión y es un círculo de radio R. Encontrar los niveles de energía y comparar con el caso unidimensional en el límite $R \ll L$.

6 Considerar el operador Hamiltoniano correspondiente al oscilador armónico unidimensional

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2.$$

Escribir en representación de coordenadas la ecuación de Schrodinger para un estado estacionario (autoestado de H) y resolverla.

7 Suponer que se tiene un operador N con autovalores n y un operador a tales que $[N, a] = -ca$ con $c \in \mathbb{C}$. Llamamos $|n\rangle$ al autoestado de N con autovalor n (suponemos que no hay degeneración).

(a) Mostrar entonces que $a|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n - c$

(b) Si N es hermítico, mostrar que $a^\dagger|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n + c$, con n y c reales. Notar que si c es positivo entonces a baja los autovalores y se lo llama *operador de bajada o aniquilación* mientras que $a^\dagger$ los sube y se lo llama *operador de subida o creación.*

8 Considere un oscilador armónico en una dimensión, y las siguientes definiciones

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,$$

donde $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son autoestados de $N := a^\dagger a$ con autovalor n.

(a) Calcule $[a, a^\dagger]$ y compruebe que se verifiquen las relaciones de conmutación del ejercicio anterior con $c = 1$.

(b) Muestre que los autovalores de N son enteros no negativos, asumiendo que existe el estado $|0\rangle$ (esto lo veremos en el ejercicio 10). Por lo tanto $n \in \mathbb{N}$.

(c) Muestre que $H = \hbar\omega(N + 1/2)$, por lo tanto los autestados de N coinciden con los de H.

(d) Evalúe $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x, p\}|n\rangle$, $\langle m|x^2|n\rangle$ y $\langle m|p^2|n\rangle$

(e) Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

9 Utilizando los resultados del ejercicio anterior, muestre que los autoestados del oscilador armónico unidimensional satisfacen la siguiente relación,

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2\ .$$

¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

$\boxed{10}$ Resuelva la ecuación diferencial $a\,|0\rangle = 0$ para obtener el estado fundamental. Luego obtenga $a^{\dagger}\,|0\rangle = |1\rangle$, el primer estado excitado del oscilador armónico unidimensional.

$\boxed{11}$ Considere la función, conocida como función de correlación, definida como

$$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle\,,$$

donde $\langle x(t)\rangle$ es el operador de posición en la representación de Heisenberg. Evalúe explicitamente la función de correlación para el estado fundamental de un oscilador armónico en una dimensión.

$\boxed{12}$ Considere nuevamente un oscilador armónico en una dimensión. Sin trabajar con las funciones de onda:

(a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ que maximice $\langle x\rangle$.

(b) Considere que el oscilador se encuentra a $t = 0$ en el estado hallado en el punto (a). ¿Cuál es el vector de estado para $t > 0$ en la representación de Schrödinger ? Evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ como función del tiempo para $t > 0$ usando: (i) la representación de Schrödinger, y (ii) la representación de Heisenberg.

(c) Evalue $\langle(\Delta x)^2\rangle$ como función del tiempo en ambas representaciones.

$\boxed{13}$ Demuestre que para el estado fundamental de un oscilador armónico en una dimensión, $|0\rangle$, se verifica

$$\left\langle 0\left|e^{ikx}\right|0\right\rangle = \exp\left(-\frac{k^2}{2}\left\langle 0\left|x^2\right|0\right\rangle\right)$$

donde x es el operador de posición.

$\boxed{14}$ Considere una partícula sujeta a un potencial de oscilador armónico en una dirección. Suponga que a $t = 0$ el estado viene dado por

$$|\varphi\rangle = \exp\left(\frac{-ipd}{\hbar}\right)|0\rangle\,,$$

donde p es el operador de momento y d es un número con dimensiones de longitud. Usando la representación de Heisenberg, evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ para $t > 0$. Muestre que $|\varphi\rangle$ es autoestado del operador de destrucción a y calcule su autovalor. Interprete el resultado. ¿Qué tipo de estado describe $|\varphi\rangle$?

$\boxed{15}$ Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle\,,$$

donde λ es en general un número complejo (note que a es no hermitíco).

(a) Demuestre que

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}e^{\lambda a^{\dagger}}\,|0\rangle$$

es un estado coherente normalizado.

(b) Demuestre que estos estados verifican la relación de mínima incerteza.

(c) Pruebe que un estado coherente se puede obtener también mediante la aplicación del operador de traslación $\exp(-ipl/\hbar)$ (siendo p el operador de momento y l la distancia desplazada) al estado fundamental.

$\boxed{16}$ Escriba la función de onda (en el espacio de coordenadas) para el estado especificado en el problema 14 a $t = 0$. Obtenga luego la probabilidad de que al medir la energía de la partícula a $t = 0$ se obtenga la energía del nivel fundamental. ¿Cómo evoluciona dicha probabilidad para $t > 0$?

$\boxed{17}$ Considere un autoestado del operador de destrucción a

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \ ,$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Calcule $\langle H\rangle$, $\langle P\rangle$ y $\langle X\rangle$ en un estado $|\alpha\rangle$ y muestre que satisfacen la misma relación que las variables clásicas $E = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ para $E \gg \hbar\omega$. ¿Qué condicion impone ésto para los valores de α?

(b) Halle la evolución temporal de $|\alpha\rangle$ desarrollándolo en la base $\{|n\rangle\}$ de autoestados de H. Muestre que el estado continúa siendo autoestado del operador a, pero que el autovalor α varía en el tiempo. Dibuje en el plano complejo la evolución de α y muestre como varían $\langle H\rangle$ y $\langle P\rangle$ en el tiempo.

(c) Deduzca y resuelva las ecuaciones de evolución en la representación de Heisemberg para los operadores a y $a^\dagger$.

(d) Si se mide la energía del sistema en un $t > 0$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

$\boxed{18}$ Considere una partícula sometida a un potencial de la forma

$$V = \begin{cases} kx^2/2 & x > 0 \\ \infty & x < 0. \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la energía del estado fundamental?

(b) ¿Cuál es el valor de expectación $\langle X^2\rangle$ para el estado fundamental?

$\boxed{19}$ Considere un oscilador armónico cargado (carga $q > 0$) moviéndose unidimensionalmente en presencia de un campo eléctrico constante y uniforme, de modo que el hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + qEx.$$

Escribir la función de onda del estado fundamental y hallar el espectro de energía del sistema.

$\boxed{20}$ Un electrón se mueve en presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z ($\mathbf{B} = B\hat{z}$).

(a) Evalúe $[\Pi_x, \Pi_y]$, donde

$$\Pi_x = p_x - \frac{eA_x}{c} \qquad \Pi_y = p_y - \frac{eA_y}{c}\ . \tag{2}$$

(b) Tenga en cuenta ahora que un *gauge* posible es $A_x = 0$ y $A_y = Bx\hat{y}$. Proponga un estado estacionario tipo onda plana $\psi = e^{i\vec{k}\cdot(z\hat{z}+y\hat{y})} f(x)$. Usando las relaciones de conmutación obtenidas en (a) y las expresiones correspondientes al problema del oscilador armónico unidimensional, muestre que los autovalores de energía de este problema son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right)\ , \tag{3}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $\hbar k_z$ es el "autovalor continuo" del operador p_z. Notar que hay una frecuencia efectiva dada por $\omega = \frac{eB}{mc}$. Ayuda: complete cuadrados para poder tratar el término lineal en x.