

“It’s not merely that you don’t know all three components of the angular momentum; there simply aren’t three components (...)” - David Griffiths.

Cuestiones generales del grupo de Lie $SU(2)$ y el álgebra $su(2)$

1] Considere las matrices unitarias de determinante uno de 2×2 : $SU(2)$. Muestre que forman un grupo con el producto ‘.’ dado por multiplicar matrices, es decir, que satisfacen

- $g.g' \in SU(2)$ si $g, g' \in SU(2)$
- $\forall g \in SU(2) \quad \exists g' \in SU(2)$ tal que $g'.g = g.g' = \text{Id}$. Se suele decir que $g' = g^{-1}$.
- La matriz identidad satisface $g.\text{Id} = \text{Id}.g = g, \quad \forall g \in SU(2)$.
- $g.(h.f) = (g.h).f$, para todo $g, h, f \in SU(2)$

2] Mostrar que toda matriz de $SU(2)$ se puede escribir de la forma

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

con α y β números complejos tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Concluir que los elementos de $SU(2)$ corresponden a puntos en una tres-esfera S^3 embebida en \mathbb{R}^4 . Los grupos que admiten una estructura de superficie (*variedad* es el término) se denominan grupos de Lie: en este caso al grupo $SU(2)$ se le da la estructura diferenciable de S^3 .

3] La versión infinitesimal de $SU(2)$, su álgebra: se define el álgebra de un grupo de Lie como el tangente al elemento identidad. Para entender esto, considere una familia de elementos de $SU(2)$ arbitrarios en la forma del ejercicio anterior, con $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ funciones del parámetro t restringidas a la condición (A) $|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1$. Queremos tomar el tangente en la identidad, por lo tanto $\alpha(0) = 1$ y $\beta(0) = 0$. Derive respecto a t cada elemento de matriz así como la condición (A), evalúe a $t = 0$ y concluya que el álgebra $su(2)$ se puede pensar como las matrices de la forma

$$\dot{g}|_{t=0} = X = \begin{pmatrix} i\lambda & z \\ -\bar{z} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

con λ real y z complejo.

4] El álgebra de $su(2)$ en términos abstractos: considerar un espacio vectorial de tres dimensiones, con un producto que en una base $\{J_1, J_2, J_3\}$ toma la forma:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

Mostrar que este espacio vectorial es un algebra de Lie, o sea que el producto satisface la propiedad de Jacobi:

$$[J_1, [J_2, J_3]] + [J_2, [J_3, J_1]] + [J_3, [J_1, J_2]] = 0$$

Este es el álgebra del grupo $SU(2)$ (denominada $su(2)$) y codifica toda la información del grupo (no siempre sucede esto con otros grupos y sus álgebras). Los J_i se denominan *generadores* del grupo, ya que al exponenciarlos se recupera el grupo de Lie.

Aclaración: este es el álgebra $su(2)$ pero donde los generadores no tienen la forma de la matriz X del ejercicio anterior, sino iX , por esto es que va a aparecer siempre $-iJ_j$ en las exponenciales para formar un elemento del grupo.

5] Mostrar que sobre \mathbb{C}^2 las matrices de $SU(2)$ actúan con las siguientes propiedades:

- Linealidad (no hay trampa, es trivial)
- $g'.(g.v) = (g'.g).v$ donde $v \in \mathbb{C}^2$. Esto es que la manera de actuar sobre vectores respete el producto del grupo (producto de matrices en este caso).

Se llama representación fundamental a aquella en que los matrices de $n \times n$ de un grupo actúan naturalmente sobre un espacio vectorial de dimensión (compleja) n . En el caso de $SU(2)$ esta es la representación de spin 1/2 (que tiene dimensión 2).

6] Mostrar que si σ_i con $i = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli, entonces

- (a) $J_i = \sigma_i/2$ satisface precisamente el producto del ejercicio anterior, donde $[,]$ es conmutador de las matrices. Esta es la representación 2-dimensional de $su(2)$, la llamada de spin 1/2.
- (b) cualquier elemento de $SU(2)$ en la representación fundamental es de la forma $\exp(-i\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2}\phi)$, con n_i las componentes de un versor y ϕ un ángulo.
- (c) una rotación en cualquier dirección y de ángulo 2π en un espacio 2-dimensional equivale a multiplicar por -1.

7] Se dice que ρ es representación (lineal) de un álgebra si, por ejemplo en este caso $[\rho(J_i), \rho(J_j)] = \rho([J_i, J_j])$. Mostrar que las siguientes matrices de 3×3 son una representación de dimensión 3 de $su(2)$:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con $\rho : J_i \mapsto F_i$.

8] Para hablar de otras representaciones de $su(2)$, construya los operadores de subida y bajada J_+ y J_- a partir de la base del ejercicio 4, tales que $[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$. Muestre además que

- (a) Un Casimir (elemento que conmuta con todo) de $su(2)$ es $J^2 = J_i J_i$. Se puede ver que es el único Casimir de $su(2)$.
- (b) Mostrar que si m es autovalor de J_z y $j(j+1)$ es autovalor de J^2 , con autoestado correspondiente $|j \ m\rangle$, entonces j es semi-entero positivo, m varía en saltos de una unidad y

$$-j \leq m \leq j$$

(usar que J_i deben ser observables). Concluir que los estados $|j \ m\rangle$ son una base ortonormal de $\mathbb{C}^{j(j+1)}$, para j fijo. Esta es una *representación irreducible* (dado j). Ayuda: ver por ejemplo la sección 3.5 del Sakurai o el capítulo 7 del Ballentine.

- (c) Vamos a llamar operadores de spin S_i a $S_i := \hbar J_i$. Mostrar que entonces $S_z|j \ m\rangle = \hbar m|j \ m\rangle$ y $S^2|j \ m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j \ m\rangle$. Ídem con el momento angular: $L_i = \hbar J_i$, con la salvedad que solo van a actuar sobre funciones de cuadrado integrable y esto implica j entero (ver ejercicio 18 más abajo).

9] Si $\langle j \ m|j' \ m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$ entonces mostrar que

$$\langle j' \ m'|J_{\pm}|j \ m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\delta_{jj'}\delta_{m', m \pm 1}$$

- 10] Considere un rotor rígido simétrico, cuyo hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_\rho} + \frac{L_z^2}{2I_z}$$

con $I_\rho \geq I_z$.

- (a) Hallar el espectro de energía del sistema.
 (b) Demostrar que hay niveles de energía degenerados. ¿Qué relación deben satisfacer I_ρ e I_z para que esta degeneración sea máxima?

- 11] Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín 1/2, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje z ,

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-i\frac{S_z\varphi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle.$$

- (a) Calcule $\langle S_x \rangle_R$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle S_x \rangle$ y $\langle S_y \rangle$ en el sistema original.
 (b) Muestre que para una rotación de 2π en φ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -|\alpha\rangle.$$

Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pag. 24.

- 12] (a) Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son dos vectores complejos en tres dimensiones.

- (b) Usando (a), muestre que el operador rotación para un sistema de espín 1/2 en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se puede escribir como

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}}, \phi) = \exp\left(-i\frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = I \cos \frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\phi}{2},$$

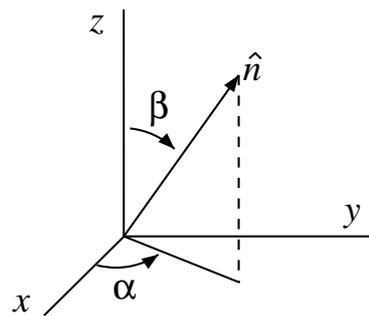
donde I es la matriz identidad.

- (c) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ que representa la rotación $(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$.
 (d) Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplique al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado para obtener el estado $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}, +\rangle$, que representa un espín $+\frac{\hbar}{2}$ orientado según $\hat{\mathbf{n}}$. Compare el resultado con el obtenido en el problema 7 de la guía 1.

- 13] Considere el problema de la precesión del espín. Encuentre la evolución de $|\alpha\rangle = |S_x, +\rangle$ en el picture de Schrodinger y la de \vec{S} en el de Heisenberg pero ahora entendiendo al operador evolución como una rotación en \hat{z} (ya que H es proporcional a S_z).

- 14] Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín 1/2 representada por

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{z}}, \alpha)\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{y}}, \beta)\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{z}}, \gamma). \quad (1)$$



(a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \text{sen}\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \text{sen}\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Debido a que las rotaciones tienen estructura de grupo y las $\mathcal{D}^{(1/2)}$ son representaciones del grupo, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje \hat{n} con ángulo θ representada por $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{n}, \theta)$. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

Nota: toda rotación (para cualquier j dado) puede escribirse como la composición de tres rotaciones, la primera y la última en \hat{z} y la segunda en \hat{y} , con los ángulos de Euler como figura en (1). Por esto suele ser importante calcular los elementos de matriz de una rotación en \hat{y} en la base de autoestados de J_z (ver ejercicio 21 para el caso $j = 1$).

15 Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores L^2 , L_x , L_y , y L_z en el subespacio generado por la base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_z . Verifique explícitamente (multiplicando las matrices) la relación $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$.

- (a) Encuentre la base $\{|l, m_y\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_y de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los $|l, m\rangle$.
- (b) Sea un estado descrito por el vector en la base $|l, m\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle - |1, -1\rangle).$$

Si se mide L_x , ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide L_y .

(c) Sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide L_z y se obtiene \hbar , e inmediatamente después se mide L_y . ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

16 Muestre que el operador momento angular L_i en la representación de coordenadas viene dado por

$$\vec{L} = -i\hbar \left[\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right].$$

Esto muestra que las componentes de momento angular actúan en $L^2(S^2)$ sin importar la dependencia radial de funciones de $L^2(\mathbb{R}^3)$.

17 Construya los armónicos esféricos $Y_{1,m} \in L^2(S^2)$. Para ello, resuelva primero $L_+ Y_{1,1} = 0$ (L_+ en la representación de coordenadas) y aplique luego el operador L_- a $Y_{1,1}$ (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados del problema anterior, escriba la combinación lineal de éstos que es autoestado de L_y con autovalor \hbar . Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación de coordenadas.

18 Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l , por ejemplo $1/2$, para el impulso angular orbital. A partir de

$$L_+ Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) = 0$$

podemos deducir, como de costumbre

$$Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) \propto e^{i\phi/2} \sqrt{\sin\theta}.$$

Intente construir entonces $Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi)$ de dos maneras diferentes:

- (a) aplicando L_- a $Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi)$,
- (b) usando que $L_- Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi) = 0$.

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l al menos para $l = 1/2$).

19 La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:

$$\Psi(x) = (x + y + 3z) f(r).$$

- (a) ¿Es Ψ autofunción de L^2 ? Si es así, ¿cuál es el valor de l ? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?
- (b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?
- (c) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor E . Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

20 Para una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico tridimensional isótropo (suponga que todos los parámetros de longitud y energía valen 1) considere el estado definido por

$$\psi(x, y, z) = C(1 + x + y) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad C = \frac{1}{\pi^{3/4} \sqrt{2}}.$$

Calcule qué valores pueden medirse (y con qué probabilidad) de las siguientes magnitudes: L^2 , L_z , L_x , y H .

21 Un haz de átomos incide con velocidad \mathbf{v} en la dirección y sobre un analizador del tipo Stern-Gerlach orientado en la dirección z . Como resultado, el haz original se divide en dos, cada uno con componente de spin según z bien definida: $S_z = -\hbar/2$ y $S_z = \hbar/2$, respectivamente.

- (a) A continuación se hace pasar al haz con $S_z = \hbar/2$ por otro analizador, exactamente igual al primero, pero separado a una distancia d y rotado en $\pi/2$ sobre el eje z , de modo que observa la componente x de los spines. ¿Cuáles son las probabilidades de obtener $\pm\hbar/2$ con el segundo analizador?
- (b) ¿Cuáles serían esas probabilidades si el segundo analizador estuviese rotado en un ángulo arbitrario θ ?

- (c) Suponga ahora que en la zona entre los dos analizadores hay un campo magnético constante $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$, al cual (solamente) se acopla el espín mediante un potencial: $V = -\frac{2\mu}{\hbar}BS_z$. Suponiendo que el segundo analizador separa las componente del espín según x , exprese las probabilidades de medir $S_x = \pm\hbar/2$ como función de B y del tiempo $T = d/v$ transcurrido entre las mediciones realizadas en el primer y el segundo analizador.

22 Osciladores de Schwinger.

Considerar los operadores de creación y destrucción correspondientes a dos pares de osciladores armónicos: $\{a_+, a_+^\dagger\}$ y $\{a_-, a_-^\dagger\}$ con las reglas de conmutación usuales y donde cualquier operador $+$ conmuta con cualquier operador $-$ (se dice entonces que están desacoplados). Considerar también los operadores número $N_\pm = a_\pm^\dagger a_\pm$. Denotamos a los estados con número definido como $|n_+, n_-\rangle$. Mostrar que

(a) $|n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+!n_-!}}|0, 0\rangle$, donde $|0, 0\rangle$ es aniquilado por a_- y a_+ .

(b) Si se definen $J_+ := a_+^\dagger a_-$, $J_- := a_-^\dagger a_+$ y $J_z := \frac{1}{2}(N_+ - N_-)$, entonces estos operadores satisfacen las reglas de conmutación usuales de los operadores de subida, bajada y componente \hat{z} de los generadores de rotaciones. Concluya que los autovalores de J_z deben ser semi enteros: $m = (n_+ - n_-)/2$.

(c) Si $N := N_+ + N_-$ entonces $J^2 = \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1)$. Se ve que $j = n/2$ es semi entero, con n autovalor de N .

23 Se tiene una partícula sin espín, cuyo hamiltoniano no depende del tiempo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

- (a) Si $[H, L_z] = 0$, entonces los niveles de energía no dependen de m .
 (b) Si $[H, \mathbf{L}^2] = 0$, entonces los niveles de energía no dependen de ℓ .
 (c) Si $[H, \mathbf{L}^2] = 0$ y el sistema se encuentra en un autoestado de \mathbf{L}^2 pero no de H a tiempo $t = 0$, entonces se encontrará en un autoestado de \mathbf{L}^2 a todo tiempo posterior.