*"We will have to abandon the philosophy of Democritus and the concept of elementary particles. We should accept instead the concept of elementary symmetries."* - W. Heisenberg.

---

**1** **Teorema de Wigner**

Sea $T$ un operador que deja invariante el módulo del producto interno entre dos vectores arbitrarios, es decir, que es tal que

$$|\langle T\psi|T\phi\rangle| = |\langle\psi|\phi\rangle|\,,$$

para todo $\psi$ y $\phi$ en el espacio de Hilbert. El teorema de Wigner [1] nos dice que $T$ es entonces un operador unitario o antiunitario [2].

(a) Dar ejemplos de operadores que cumplan la hipótesis del teorema de Wigner y que sean unitarios.

(b) * Para una partícula unidimensional sin espín y cuyo operador de evolución es $U(t)$, se define el operador de inversión temporal $T$ por medio de la siguiente acción $T\left[U(t)\,\psi(x)\right] = \left[U(t)^{-1}\,\psi(x)\right]^*$, para toda $\psi(x)$ en $L^2(\mathbb{R})$. Ver que $T$ es antiunitario.

**2** Decimos que una transformación $U$ es una simetría de un sistema si deja invariante el módulo del producto interno entre dos vectores cualesquiera y además deja invariante al hamiltoniano del sistema $H$ (es decir, cumple $UHU^{-1} = H$). Demostrar que:

(a) $e^{-ip\cdot d/\hbar}$, siendo $d$ una constante real, es una simetría de la partícula libre unidimensional.

(b) $e^{-i\mathbf{L}\cdot\hat{\mathbf{n}}/\hbar}$, siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un versor constante real, es una simetría del oscilador armónico isotrópico tridimensional.

(c) $e^{-i\epsilon H/\hbar}$, siendo $\epsilon$ una constante real, es una simetría de cualquier sistema cuyo hamiltoniano $H$ no dependa explícitamente del tiempo.

---

## Simetrías continuas

**3** Sea $U(s) = e^{isK}$, con $K$ hermítico y $s$ real, un operador que es simetría de cierto sistema físico de hamiltoniano $H$ independiente del tiempo para todo $s$.

(a) Probar que $[H, K] = 0$. $K$ se conoce como el generador infinitesimal de la simetría.

(b) Demostrar que el valor de expectación de $K$ se conserva en el tiempo. Se dice que $K$ es entonces una constante de movimiento.

(c) Probar que el momento lineal es la constante de movimiento asociada a la invariancia ante traslaciones arbitrarias.

(d) Probar que $L_z$ es la constante de movimiento asociada a la invariancia ante rotaciones arbitrarias respecto al eje $z$.

**4** **Simetrías y degeneración**

Sea $G$ el generador infinitesimal de una simetría de cierto sistema con hamiltoniano $H$. Demostrar que si $|\psi\rangle$ es un autoestado de $H$ con energía $E$, entonces $G|\psi\rangle$ también es autoestado de $H$ y tiene la misma energía $E$ [3].

[1] El teorema de Wigner en realidad se formula en términos de rayos.

[2] Un operador es antiunitario si vale $\langle T\psi|T\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$ para todo $\psi$ y $\phi$ en el espacio de Hilbert.

[3] Como en general será $G|\psi\rangle \neq |\psi\rangle$, la existencia de simetrías suele generar un aumento en la degeneración de los niveles de energía.

5 **Degeneración accidental del átomo de Hidrógeno**
Demostrar que el vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2me^2}\left(\mathbf{L}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{L}\right) + \frac{\mathbf{r}}{r},$$

conmuta con el hamiltoniano del átomo de Hidrógeno $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$. $\mathbf{K}$ es el generador infinitesimal de una transformación de simetría y es la existencia de esta simetría la responsable de la degeneración accidental en el espectro de energía del átomo de Hidrógeno.

---

## Simetrías discretas

6 **Teorema de Bloch**
Un cristal tiene invariancia ante traslaciones en un vector de la forma $\mathbf{R}_n = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$, con $n_i$ entero. Esto significa que el hamiltoniano $H$ del cristal es invariante ante traslaciones en el vector $R_n$, es decir

$$U\left(\mathbf{R}_n\right) H U\left(\mathbf{R}_n\right)^{-1} = H,$$

siendo $U\left(\mathbf{R}_n\right) = \exp\left(-ip\cdot\mathbf{R}_n/\hbar\right)$.

(a) Demostrar que los autovalores de $U\left(\mathbf{R}_n\right)$ tienen la forma $c\left(\mathbf{R}_n\right) = \exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n\right)$, siendo $\mathbf{k}$ un vector de componentes reales.

(b) Como $H$ y $U\left(\mathbf{R}_n\right)$ conmutan, tienen una base común de autofunciones $Psi\left(\mathbf{r}\right)$. Demostrar que dichas autofunciones satisfacen

$$\Psi\left(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n\right) = \exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n\right)\Psi\left(\mathbf{r}\right).$$

(c) Expandir las autofunciones del inciso anterior en ondas planas y demostrar que la distribución de momentos asociada es discreta.

7 Considere dos autoestados del operador paridad

$$\Pi\left|\alpha\right\rangle = \epsilon_\alpha\left|\alpha\right\rangle \qquad \Pi\left|\beta\right\rangle = \epsilon_\beta\left|\beta\right\rangle,$$

donde los autovalores $\epsilon_\alpha$ y $\epsilon_\beta$ pueden ser 1 o $-1$. Muestre que

$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = 0$$

salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^*\mathbf{x}\phi_\alpha \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0$ si $\phi_\alpha$ y $\phi_\beta$ tienen la misma paridad. ¿Qué ocurre con $\langle\beta|\mathbf{p}|\alpha\rangle$? ¿Y con $\langle\beta|\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}|\alpha\rangle$?

8 Sea una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico cuyo estado inicial a $t=0$ es el estado coherente

$$\left|\beta\right\rangle = e^{-|\beta|^2/2}\sum_{n=0}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle,$$

donde $\beta\in\mathbb{C}$.

(a) Se mide el operador paridad $\Pi$ a $t=0$ obteniéndose el autovalor $+1$. ¿Cuál es el estado $\left|\psi\right\rangle$ del sistema a tiempo $t>0$?

(b) ¿Qué valores puede tomar a $t > 0$ el operador $H$ y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado a un tiempo posterior? ¿Cuál es el primer estado excitado? ¿Qué resultados posibles daría la medición de $\Pi$?

$\boxed{9}$ Se tiene un sistema con hamiltoniano $H = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha L_z + \frac{1}{2} m\omega^2 z^2$. Demostrar que $\langle 0| \left(x^2 + y^2\right) z|0\rangle = 0$ y $\langle 0|xy|0\rangle = 0$ (para esto último suponer que el vacío es no degenerado).

$\boxed{10}$ Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Se tiene una partícula libre de masa $m$ en un anillo en uno de sus autoestados de energía. Entonces, la distribución de momentos de la partícula en dicho estado es discreta.

(b) Cierto estado $|\phi\rangle$ es autovector simultáneo de los operadores de paridad y momento lineal. Entonces, el valor de expectación del momento lineal en dicho estado es nulo.

(c) * Si el hamiltoniano de un sistema no degenerado y sin espín es invariante ante inversión temporal, entonces la función de onda, puede ser elegida real en cada instante de tiempo.