Por favor: resolver cada problema en hojas separadas e indicar el nombre en todas ellas.

$\boxed{1}$ *(2.5 puntos)* La representación matricial del hamiltoniano correspondiente a un fotón propagándose en dirección del eje óptico de un cristal de cuarzo, usando como base los estados de polarización lineal (normalizados) en las direcciones x e y, $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -iE_0 \\ iE_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } E_0 > 0 .$$

(a) Hallar el espectro de H y los estados de energía definida.

(b) Un fotón ingresa al cristal linealmente polarizado en dirección x a $t = 0$. Encontrar el estado del fotón a todo tiempo posterior e interpretarlo en términos de una rotación del estado inicial. Graficar la probabilidad de encontrar al fotón polarizado en la dirección x en función del tiempo.

(c) A $t = t_0 > 0$ se mide la energía y se obtiene la correspondiente al estado fundamental. ¿Qué valores de energía podrán medirse posteriormente y con qué probabilidades? ¿Cómo evoluciona el estado para $t > t_0$?.

$\boxed{2}$ *(3 puntos)* Se tiene una partícula de masa m en un potencial armónico unidimensional de frecuencia ω en el estado normalizado $|\psi(0)\rangle = (\gamma + \lambda a^\dagger)|0\rangle$ (γ, $\lambda \in \mathbb{C}$), siendo $|0\rangle$ el estado fundamental del sistema y $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right)$ el operador de creación usual. Cierto observable del sistema está dado por $Q = \alpha a + \beta a^\dagger$ (α, $\beta \in \mathbb{C}$).

(a) ¿Qué condición cumplen γ y λ? ¿Qué relación hay entre α y β?

(b) Hallar el estado del sistema a tiempo $t > 0$ y calcular $\langle Q\rangle(t)$ para $t > 0$ en la representación de Schrödinger. Mostrar que $\langle Q\rangle(t)$ es real.

(c) Calcular nuevamente $\langle Q\rangle(t)$ en representación de Heisenberg y comparar con el resultado del inciso anterior.

$\boxed{3}$ *(2 puntos)* Considere un rotor rígido simétrico, cuyo hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_\rho} + \frac{L_z^2}{2I_z}, \quad \text{con } I_\rho \geq I_z > 0 .$$

(a) Hallar el espectro de energía y demostrar que hay niveles degenerados. Hallar la degeneración de cada nivel de energía en el caso en que $I_\rho = I_z$.

(b) Se realizan sobre el sistema mediciones sucesivas de los siguientes observables: $\{\mathbf{L}^2, L_x, \mathbf{L}^2, L_z\}$, arrojando dichas mediciones los resultados: $\{6\hbar^2, 2\hbar, 6\hbar^2, \hbar\}$. ¿Cuál es el estado del sistema después de la última medición? Hallar la dispersión de L_x en dicho estado.

$\boxed{4}$ *(2.5 puntos)* Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Una partícula libre se encuentra en el estado $\psi(x) = A\cos(kx) + A\,\mathrm{sen}(2kx)$ (A, k son constantes reales). Entonces, si se mide el momento lineal de la partícula sólo se podrán obtener (con probabilidad no nula) los valores $p = \pm\hbar k$ y $p = \pm 2\hbar k$.

(b) Se tiene una partícula de masa m sometida al potencial del oscilador armónico unidimensional con frecuencia de oscilación ω. A tiempo $t = 0$, el sistema se encuentra en un estado para el cual una medición de la energía puede resultar solamente en los valores $\hbar\omega/2$ y $3\hbar\omega/2$ con la misma probabilidad, y en el que el valor medio del momento es igual a $(m\omega\hbar/2)^{1/2}$. Esta información determina completamente el estado del sistema a $t = 0$.

(c) Se tiene una partícula sin espín, cuyo hamiltoniano no depende del tiempo y es tal que $[H, L_z] = 0$. Entonces, los niveles de energía no dependen de m (m es el autovalor de $L_z/\hbar$).