

Por favor: resolver cada problema en hojas separadas e indicar el nombre en todas ellas.

- 1 (2.5 puntos) Cierta sistema cuántico de cuatro partículas (distinguibles), todas de espín $1/2$, tiene un hamiltoniano dado por

$$H_0 = -\gamma (\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 + \bar{S}_2 \cdot \bar{S}_3 + \bar{S}_3 \cdot \bar{S}_4 + \bar{S}_4 \cdot \bar{S}_1),$$

donde γ es una constante positiva y \bar{S}_i es el operador espín de la partícula i -ésima ($i = 1, 2, 3, 4$).

- ¿Cuál es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema?
- Hallar los niveles de energía y su correspondiente degeneración (no es necesario escribir explícitamente los autoestados).
- Se realizan sobre el sistema mediciones de \mathbf{S}^2 y S_z (siendo \mathbf{S} el operador espín total del sistema) y se obtienen los valores $2\hbar^2$ y \hbar respectivamente. ¿Es esta información suficiente para determinar el estado del sistema luego de estas mediciones?

- 2 (3 puntos) Encuentre la corrección a la energía del nivel $1s$ del átomo de Hidrógeno $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$ generada por los términos de estructura fina $H_f = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{e^2}{m^2c^2} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{r^3} + \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\mathbf{r})$ a primer orden en teoría de perturbaciones.

- 3 (2 puntos) Considere un potencial dado por

$$V(r) = -V_0/r^{\alpha+1}$$

donde V_0 y α son constantes positivas.

- Grafique $V(r)$ cualitativamente y compárelo con el potencial de Coulomb $-\frac{V_0}{r}$.
- Calcule la sección eficaz diferencial de scattering para una partícula de energía E y masa m en la aproximación de Born.
- ¿Qué espera obtener para $\alpha \rightarrow 0$?

- 4 (2.5 puntos) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

- Se dice que un estado $|\psi\rangle$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ está **entrelazado** si no existen $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ tales que $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Con esta definición, el estado singlete de espín asociado a dos electrones es entonces un estado entrelazado.
- Un oscilador armónico unidimensional se encuentra en el estado fundamental para $t < 0$. A tiempos positivos se lo somete a una fuerza perturbativa $F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$ en la dirección x . Después de un tiempo, será posible encontrar al sistema en el tercer estado excitado del oscilador armónico no perturbado (trabajar a primer orden en teoría de perturbaciones).
- Se tiene un sistema con hamiltoniano $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha L_z + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$. Entonces, resulta

$$\langle 0|(x^2 + y^2)z|0\rangle = 0.$$

Algunas expresiones que podrían resultar útiles (o no...)

(a) **Átomo de Hidrógeno**

- i- Energías del átomo de Hidrógeno H_0 : $E_n = -\frac{E_I}{n^2}$, con $E_I = \frac{me^4}{2\hbar^2}$.
- ii- Estado fundamental de H_0 : $\psi_{1,0,0}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-r/a_0}}{(\pi a_0^3)^{1/2}}$, siendo $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$.
- iii- Algunas integrales:
 - $\int d^3\mathbf{r} \frac{1}{r} |\psi_{1,0,0}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{a_0}$.
 - $\int d^3\mathbf{r} \frac{1}{r^2} |\psi_{1,0,0}(\mathbf{r})|^2 = \frac{2}{a_0^2}$.

(b) **Oscilador armónico unidimensional**

- i- Operador de destrucción: $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right)$.

(c) **Algunas integrales**

- i- Si $f(\mathbf{r}) = f(r)$ (depende sólo del módulo de \mathbf{r}) entonces

$$\int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(r) = \frac{4\pi}{|\mathbf{k}|} \int_0^{+\infty} dr r \text{sen}(|\mathbf{k}|r) f(r).$$

- ii- $\int_0^{+\infty} dx \text{sen}(\beta x) / x^\alpha = \beta^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(1-\alpha)$

(d) **Tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan**

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	...
M	M	...

$1/2 \times 1/2$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>+1/2</td><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> </table>	1	0	0	+1/2	1/2	-1/2	-1/2	1/2	-1/2	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$ $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$ $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right)$ $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi}$ $Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi}$	$2 \times 1/2$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+5/2</td><td>+3/2</td></tr> <tr><td>+2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>+1</td><td>+1/2</td></tr> </table>	5/2	3/2	+5/2	+3/2	+2	-1/2	+1	+1/2	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>m_1</td><td>m_2</td></tr> <tr><td>m_1</td><td>m_2</td></tr> <tr><td>...</td><td>...</td></tr> </table>	m_1	m_2	m_1	m_2																			
1	0	0																																											
+1/2	1/2	-1/2																																											
-1/2	1/2	-1/2																																											
5/2	3/2																																												
+5/2	+3/2																																												
+2	-1/2																																												
+1	+1/2																																												
m_1	m_2																																												
m_1	m_2																																												
...	...																																												
$1 \times 1/2$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>+3/2</td><td>+1/2</td></tr> <tr><td>+1</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>0</td><td>+1/2</td></tr> </table>	3/2	1/2	+3/2	+1/2	+1	-1/2	0	+1/2	$3/2 \times 1/2$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	2	1	+2	+1	+1	-1	0	0	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>m_1</td><td>m_2</td><td>Coefficients</td></tr> <tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr> </table>	m_1	m_2	Coefficients																					
3/2	1/2																																												
+3/2	+1/2																																												
+1	-1/2																																												
0	+1/2																																												
2	1																																												
+2	+1																																												
+1	-1																																												
0	0																																												
m_1	m_2	Coefficients																																											
...																																											
2×1 <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>+3</td><td>+2</td></tr> <tr><td>+2</td><td>0</td></tr> <tr><td>+1</td><td>+1</td></tr> </table>	3	2	+3	+2	+2	0	+1	+1	$3/2 \times 1$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+5/2</td><td>+3/2</td></tr> <tr><td>+3/2</td><td>0</td></tr> <tr><td>+1/2</td><td>+1</td></tr> </table>	5/2	3/2	+5/2	+3/2	+3/2	0	+1/2	+1	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	2	1	+2	+1	+1	-1	0	0																			
3	2																																												
+3	+2																																												
+2	0																																												
+1	+1																																												
5/2	3/2																																												
+5/2	+3/2																																												
+3/2	0																																												
+1/2	+1																																												
2	1																																												
+2	+1																																												
+1	-1																																												
0	0																																												
1×1 <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>+1</td></tr> </table>	2	1	+2	+1	+1	0	0	+1	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3</td><td>+2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+2</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>+1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> </table>	3	2	1	+3	+2	+1	+2	0	0	+1	-1	-1	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>+1</td></tr> </table>	2	1	+2	+1	+1	0	0	+1															
2	1																																												
+2	+1																																												
+1	0																																												
0	+1																																												
3	2	1																																											
+3	+2	+1																																											
+2	0	0																																											
+1	-1	-1																																											
2	1																																												
+2	+1																																												
+1	0																																												
0	+1																																												
$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>0</td><td>1/2</td><td>1/2</td><td>2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1</td><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> </table>	0	1/2	1/2	2	-1	0	1/2	-1/2	-1	-1	1/2	-1/2	$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3</td><td>+2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+2</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>+1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> </table>	3	2	1	+3	+2	+1	+2	0	0	+1	-1	-1	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3/2</td><td>1/2</td><td>1/2</td><td>2</td></tr> <tr><td>+3/2</td><td>+1/2</td><td>+1/2</td><td>+2</td></tr> <tr><td>+2</td><td>0</td><td>1/3</td><td>-2/3</td></tr> <tr><td>+1</td><td>-1</td><td>2/3</td><td>-1/3</td></tr> </table>	3/2	1/2	1/2	2	+3/2	+1/2	+1/2	+2	+2	0	1/3	-2/3	+1	-1	2/3	-1/3	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>$j_1 j_2 m_1 m_2 j_1 j_2 J M \rangle$</td></tr> <tr><td>$= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 j_2 j_1 J M \rangle$</td></tr> </table>	$j_1 j_2 m_1 m_2 j_1 j_2 J M \rangle$	$= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 j_2 j_1 J M \rangle$
0	1/2	1/2	2																																										
-1	0	1/2	-1/2																																										
-1	-1	1/2	-1/2																																										
3	2	1																																											
+3	+2	+1																																											
+2	0	0																																											
+1	-1	-1																																											
3/2	1/2	1/2	2																																										
+3/2	+1/2	+1/2	+2																																										
+2	0	1/3	-2/3																																										
+1	-1	2/3	-1/3																																										
$j_1 j_2 m_1 m_2 j_1 j_2 J M \rangle$																																													
$= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 j_2 j_1 J M \rangle$																																													