Por favor: resolver cada problema en hojas separadas e indicar el nombre en todas ellas.

$\boxed{1}$ *(2.5 puntos)* Cierto sistema cuántico de cuatro partículas (distinguibles), todas de espín 1/2, tiene un hamiltoniano dado por

$$H_0 = -\gamma \left(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 + \bar{S}_2 \cdot \bar{S}_3 + \bar{S}_3 \cdot \bar{S}_4 + \bar{S}_4 \cdot \bar{S}_1 \right) ,$$

donde γ es una constante positiva y $\bar{S}_i$ es el operador espín de la partícula i-ésima ($i = 1, 2, 3, 4$).

(a) ¿Cuál es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema?

(b) Hallar los niveles de energía y su correspondiente degeneración (no es necesario escribir explícitamente los autoestados).

(c) Se realizan sobre el sistema mediciones de $\mathbf{S}^2$ y S_z (siendo $\mathbf{S}$ el operador espín total del sistema) y se obtienen los valores $2\hbar^2$ y $\hbar$ respectivamente. ¿Es esta información suficiente para determinar el estado del sistema luego de estas mediciones?

$\boxed{2}$ *(3 puntos)* Encuentre la corrección a la energía del nivel $1s$ del átomo de Hidrógeno $H_0 = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m} - \dfrac{e^2}{r}$ generada por los términos de estructura fina $H_f = -\dfrac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \dfrac{e^2}{m^2c^2}\dfrac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}{r^3} + \dfrac{\pi e^2\hbar^2}{2m^2c^2}\delta(\mathbf{r})$ a primer orden en teoría de perturbaciones.

$\boxed{3}$ *(2 puntos)* Considere un potencial dado por

$$V(r) = -V_0/r^{\alpha+1}$$

donde V_0 y α son constantes positivas.

(a) Grafique $V(r)$ cualitativamente y compárelo con el potencial de Coulomb $-\dfrac{V_0}{r}$.

(b) Calcule la sección eficaz diferencial de scattering para una partícula de energía E y masa m en la aproximación de Born.

(c) ¿Qué espera obtener para $\alpha \to 0$?

$\boxed{4}$ *(2.5 puntos)* Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Se dice que un estado $|\psi\rangle$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ está **entrelazado** si no existen $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ tales que $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Con esta definición, el estado singlete de espín asociado a dos electrones es entonces un estado entrelazado.

(b) Un oscilador armónico unidimensional se encuentra en el estado fundamental para $t < 0$. A tiempos positivos se lo somete a una fuerza perturbativa $F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$ en la dirección x. Después de un tiempo, será posible encontrar al sistema en el tercer estado excitado del oscilador armónico no perturbado (trabajar a primer orden en teoría de perturbaciones).

(c) Se tiene un sistema con hamiltoniano $H = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha L_z + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$. Entonces, resulta

$$\langle 0|(x^2 + y^2)z|0\rangle = 0\,.$$

Algunas expresiones que podrían resultar útiles (o no...)

(a) **Átomo de Hidrógeno**

i- Energías del átomo de Hidrógeno H_0: $E_n = -\dfrac{E_I}{n^2}$, con $E_I = \dfrac{me^4}{2\hbar^2}$.

ii- Estado fundamental de H_0: $\psi_{1,0,0}(\mathbf{r}) = \dfrac{e^{-r/a_0}}{(\pi a_0^3)^{1/2}}$, siendo $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{me^2}$.

iii- Algunas integrales:

- $\int d^3\mathbf{r}\, \dfrac{1}{r} |\psi_{1,0,0}(\mathbf{r})|^2 = \dfrac{1}{a_0}$.
- $\int d^3\mathbf{r}\, \dfrac{1}{r^2} |\psi_{1,0,0}(\mathbf{r})|^2 = \dfrac{2}{a_0^2}$.

(b) **Oscilador armónico unidimensional**

i- Operador de destrucción: $a = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \dfrac{i}{m\omega}p\right)$.

(c) **Algunas integrales**

i- Si $f(\mathbf{r}) = f(r)$ (depende sólo del módulo de $\mathbf{r}$) entonces

$$\int d^3\mathbf{r}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(r) = \frac{4\pi}{|\mathbf{k}|}\int_0^{+\infty} dr\, r\, \mathrm{sen}\left(|\mathbf{k}|r\right) f(r)\,.$$

ii- $\int_0^{+\infty} dx\, \mathrm{sen}\,(\beta x)/x^\alpha = \beta^{\alpha-1}\cos\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(1-\alpha)$

(d) **Tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan**