Por favor: resolver cada problema en hojas separadas e indicar el nombre en todas ellas.

$\boxed{1}$ *(2.5 puntos)* Se tiene una molécula triatómica y con $|\psi_n\rangle$ ($n = 1, 2, 3$) se representa el estado normalizado de un electrón completamente localizado en el átomo n-ésimo. Si se desprecia la posibilidad de que un electrón salte de un átomo a otro, el hamiltoniano H_0 del sistema es tal que $|\psi_n\rangle$ es autovector de H_0 con el mismo autovalor E_0 para todo n.

(a) Escriba la representación matricial de H_0 en la base de los $|\psi_n\rangle$.

(b) Suponga que se agrega a H_0 una interacción W definida por la siguiente acción

$$W|\psi_n\rangle = -a\left(|\psi_{n-1}\rangle + |\psi_{n+1}\rangle\right) ,$$

con $a > 0$ (usamos notación cíclica: $|\psi_{3+1}\rangle \equiv |\psi_1\rangle$ y $|\psi_{1-1}\rangle \equiv |\psi_3\rangle$). Hallar los autovalores de $H = H_0 + W$ y su degeneración. ¿Está el electrón localizado en un sólo átomo cuando se encuentra en el estado fundamental?

(c) Suponga que a $t = 0$ el electrón se encuentra localizado en el átomo 1. Hallar la probabilidad de encontrarlo localizado en el átomo 3 para cierto $t > 0$.

$\boxed{2}$ *(2.5 puntos)* Una partícula de masa m en una dimensión se encuentra sometida al potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + Fx ,$$

siendo k y F constantes positivas.

(a) Escribir el hamiltoniano del sistema y hallar el espectro de energía.

(b) Escribir una ecuación diferencial que permita hallar el valor medio del momento para todo tiempo (no es necesario resolverla).

(c) Si conoce que cierta función $g(x)$ es autoestado del hamiltoniano para $F = 0$, ¿cómo podría obtener un autoestado del hamiltoniano para el caso en que $F \neq 0$?.

$\boxed{3}$ *(2.5 puntos)* La función de onda de una partícula de masa m sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por

$$\Psi(\mathbf{r}) = (x + y + 3\,z)\, f(r) ,$$

siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y f cierta función conocida.

(a) Indicar los valores que se pueden obtener al medir $\mathbf{L}^2$ y L_z y sus respectivas probabilidades.

(b) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(\mathbf{r})$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

$\boxed{4}$ *(2.5 puntos)* Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Sobre cierto sistema cuántico se realizan mediciones sucesivas (a intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños entre ellas) de ciertos observables A, B y C en el siguiente orden $\{A, B, A, C, C, A\}$ obteniéndose respectivamente los valores $\{a_1, b_1, a_2, c_1, c_1, a_2\}$. Entonces, si inmediatamente después de la última medición se mide A se obtendrá el valor a_2.

(b) En la representación de Heisenberg, el operador de número del oscilador armónico unidimensional es independiente del tiempo.

(c) Si $[H, \mathbf{L}^2] = 0$ y el sistema se encuentra en un autoestado de $\mathbf{L}^2$ pero no de H a tiempo $t = 0$, entonces se encontrará en un autoestado de $\mathbf{L}^2$ a todo tiempo posterior.

Algunas expresiones que podrían resultar útiles (o no...)

(a) **Oscilador armónico unidimensional**

i- Operador de destrucción: $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right)$.

ii- Operador de número: $N = a^\dagger a$.

(b) **Potenciales centrales**

i- Hamiltoniano para un potencial central $V(r)$: $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} + V(r)$.

(c) **Algunos armónicos esféricos (normalizados)**

l = 0

$$Y_0^0(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

l = 1

$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cdot e^{-i\varphi}\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cdot\frac{(x-iy)}{r}$$

$$Y_1^{0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cdot\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cdot\frac{z}{r}$$

$$Y_1^{1}(\theta,\varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cdot e^{i\varphi}\cdot\sin\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cdot\frac{(x+iy)}{r}$$

l = 2

$$Y_2^{-2}(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{-2i\varphi}\cdot\sin^2\theta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot\frac{(x-iy)^2}{r^2}$$

$$Y_2^{-1}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{-i\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot\frac{(x-iy)z}{r^2}$$

$$Y_2^{0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\cdot(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\cdot\frac{(2z^2-x^2-y^2)}{r^2}$$

$$Y_2^{1}(\theta,\varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{i\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot\frac{(x+iy)z}{r^2}$$

$$Y_2^{2}(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{2i\varphi}\cdot\sin^2\theta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot\frac{(x+iy)^2}{r^2}$$