1 *(2.5 puntos) La representación matricial del hamiltoniano correspondiente a un fotón propagándose en dirección del eje óptico de un cristal de cuarzo, usando como base los estados de polarización lineal (normalizados) en las direcciones x e y, $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, es*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -iE_0 \\ iE_0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \textit{con}\;\; E_0 > 0\,.$$

(a) *Hallar el espectro de H y los estados de energía definida.*

Para hallar el espectro de H planteamos la ecuación que satisfacen sus autovalores λ y la resolvemos

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - \frac{E_0^2}{2}) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{E_0}{\sqrt{2}}\,.$$

El espectro de H es entonces el conjunto $\{-\frac{E_0}{\sqrt{2}}, \frac{E_0}{\sqrt{2}}\}$. Llamamos $E_1 = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ a la energía del estado fundamental del sistema ($E_0 > 0$) y $E_2 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ a la energía del primer estado excitado. Los estados de energía definida son los autovectores de H. Un autovector u de H con autovalor λ cumple que $(H - \lambda I)u = 0$. Utilizando los valores de $\lambda = E_1, E_2$ obtenemos los dos autovectores de H en representación matricial

$$u_{E_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_{E_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\,,$$

o en notación de Dirac

$$|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \quad \text{y} \quad |E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle)\,.$$

Notar que dichos autovectores ya se encuentran normalizados: $\langle E_1|E_1\rangle = \langle E_2|E_2\rangle = 1$. $|E_1\rangle$ es el estado fundamental del sistema, ya que es el autovector asociado al menor autovalor de H.

(b) *Un fotón ingresa al cristal linealmente polarizado en dirección x a $t = 0$. Encontrar el estado del fotón a todo tiempo posterior e interpretarlo en términos de una rotación del estado inicial. Graficar la probabilidad de encontrar al fotón polarizado en la dirección x en función del tiempo.*

El estado del sistema a tiempo cero está dado por $|\psi(0)\rangle = |x\rangle$. Para hallar su evolución temporal $|\psi(t)\rangle$ podemos escribir $|\psi(0)\rangle$ en término de los autoestados de energía definida

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle)\,,$$

y actuar con el operador de evolución $U = e^{-iHt/\hbar}$ sobre dicho estado

$$|\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle = e^{-iHt/\hbar}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_1t/\hbar}|E_1\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}|E_2\rangle\right)\,.$$

siendo $E_1 = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ y $E_2 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$. Para interpretar $|\psi(t)\rangle$ en términos de una rotación del estado inicial lo escribimos en términos de los estados de polarización $\{|x\rangle, |y\rangle\}$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_1 t/\hbar}|E_1\rangle + e^{-iE_2 t/\hbar}|E_2\rangle\right) = ... = \cos\left(\frac{E_0 t}{\sqrt{2}\hbar}\right)|x\rangle + \text{sen}\left(\frac{E_0 t}{\sqrt{2}\hbar}\right)|y\rangle\,.$$

En esta última expresión podemos ver que, a tiempo t, el sistema se encuentra con polarización lineal en la dirección que se obtiene al rotar el eje x respecto del eje z en un ángulo $\frac{E_0 t}{\sqrt{2}\hbar}$ en sentido antihorario. La polarización del sistema va rotando en el tiempo. Esto también se puede ver en el gráfico que muestra la probabilidad $\mathcal{P}(t)$ de encontrar al fotón polarizado en la dirección x en función del tiempo. Para graficar esto, recordamos que

$$\mathcal{P}(t) = |\langle x|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{E_0 t}{\sqrt{2}\hbar}\right)$$

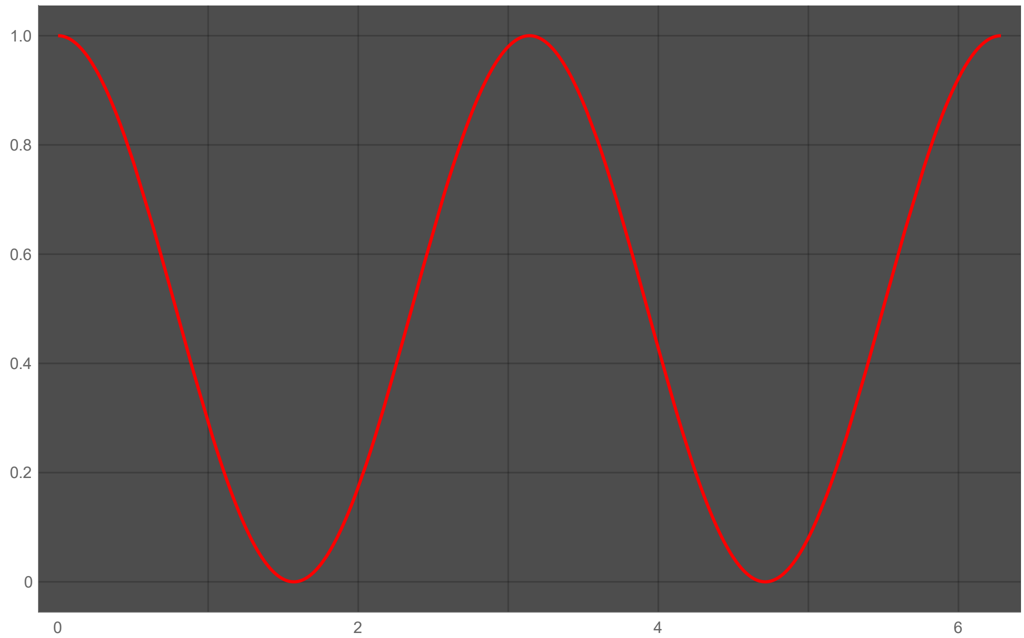

Figura 1: $\mathcal{P}(t)$ como función de $x = \dfrac{E_0 t}{\sqrt{2}\hbar}$.

(c) *A $t = t_0 > 0$ se mide la energía y se obtiene la correspondiente al estado fundamental. ¿Qué valores de energía podrán medirse posteriormente y con qué probabilidades? ¿Cómo evoluciona el estado para $t > t_0$?.*

Inmediatamente después de la medición, el estado del sistema colapsa al autoestado asociado a la energía del nivel fundamental. Es decir, luego de medir, a $t = t_0$ el estado del sistema es

$$|\psi(t_0)\rangle = |E_1\rangle\,.$$

Como dicho estado es un autovector del hamiltoniano, su evolución temporal a tiempo $t > t_0$ será

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\frac{t-t_0}{\hbar}H}|\psi(t_0)\rangle = e^{i\frac{t-t_0}{\hbar}E_1}|E_1\rangle\,,$$

que representa el mismo estado $|E_1\rangle$ ya que difiere de él en la fase global $e^{i\frac{t-t_0}{\hbar}E_1}$. Por lo tanto, sólo podrá medirse el valor de energía E_1 con probabilidad no nula.

$\boxed{2}$ *(3 puntos) Se tiene una partícula de masa m en un potencial armónico unidimensional de frecuencia ω en el estado normalizado $|\psi(0)\rangle = (\gamma + \lambda a^\dagger)|0\rangle$ (γ, $\lambda \in \mathbb{C}$), siendo $|0\rangle$ el estado fundamental del sistema y $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right)$ el operador de creación usual. Cierto observable del sistema está dado por $Q = \alpha a + \beta a^\dagger$ (α, $\beta \in \mathbb{C}$).*

(a) *¿Qué condición cumplen γ y λ? ¿Qué relación hay entre α y β?*

El estado $|\psi(0)\rangle = (\gamma + \lambda a^\dagger)|0\rangle = \gamma|0\rangle + \lambda|1\rangle$ del sistema es un vector normalizado, entonces debe valer $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1$, lo que implica que

$$|\gamma|^2 + |\lambda|^2 = 1\,.$$

Por otro lado, si Q representa un observable del sistema entonces debe ser un operador hermítico, es decir, debe valer $Q = Q^\dagger$. Como $Q^\dagger = \alpha^* a^\dagger + \beta^* a$, concluímos que debe ser

$$\alpha = \beta^*\,.$$

(b) *Hallar el estado del sistema a tiempo $t > 0$ y calcular $\langle Q\rangle(t)$ para $t > 0$ en la representación de Schrödinger. Mostrar que $\langle Q\rangle(t)$ es real.*

A tiempo $t = 0$ el estado del sistema es una combinación lineal de autoestados del hamiltoniano. Actuar con el operador de evolución temporal $U(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}$ sobre el autoestado $|n\rangle$ nos da $U(t)|n\rangle = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}|n\rangle = e^{-i\frac{t}{\hbar}E_n}|n\rangle$, siendo $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ el autovalor de H asociado al estado $|n\rangle$. Luego

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = \gamma e^{-i\frac{t}{\hbar}E_0}|0\rangle + \lambda e^{-i\frac{t}{\hbar}E_1}|1\rangle\,,$$

con $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ y $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$.

En representación de Schrödinger $\langle Q\rangle(t) = \langle\psi(t)|Q|\psi(t)\rangle$. Calculamos

$$Q|\psi(t)\rangle = \left(\alpha^* a^\dagger + \alpha a\right)\left(\gamma e^{-i\frac{t}{\hbar}E_0}|0\rangle + \lambda e^{-i\frac{t}{\hbar}E_1}|1\rangle\right) = \alpha^*\gamma e^{-i\frac{t}{\hbar}E_0}|1\rangle + \alpha^*\lambda e^{-i\frac{t}{\hbar}E_1}|2\rangle + \alpha\lambda e^{-i\frac{t}{\hbar}E_1}|0\rangle\,.$$

Luego

$$\langle\psi(t)|Q|\psi(t)\rangle = \lambda^*\alpha^*\gamma e^{i\frac{t}{\hbar}(E_1 - E_0)} + \gamma^*\alpha\lambda e^{-i\frac{t}{\hbar}(E_1 - E_0)} = 2\mathrm{Re}\left[\lambda^*\alpha^*\gamma e^{i\frac{t}{\hbar}(E_1 - E_0)}\right]\,,$$

que es evidentemente real, como esperábamos.

(c) *Calcular nuevamente $\langle Q\rangle(t)$ en representación de Heisenberg y comparar con el resultado del inciso anterior.*

En representación de Heisenberg $\langle Q\rangle(t) = \langle\psi_H|Q_H(t)|\psi_H\rangle$. Tomamos $|\psi_H\rangle$ como el estado a tiempo fijo $t = 0$, es decir

$$|\psi_H\rangle = |\psi(0)\rangle\,.$$

$Q_H(t)$ está relacionado entonces con Q por la siguiente ecuación

$$Q_H(t) = U^\dagger(t)QU(t) = \alpha U^\dagger a U + \alpha^* U^\dagger a^\dagger U = \alpha a_H + \alpha^* a_H^\dagger\,.$$

En este punto, podían escribir directamente la expresión para a_H y $a_H^\dagger$ que ya habíamos visto en clases (o plantear la ecuación diferencial que satisfacen estos operadores[1] y resolverlas). Se tiene $a_H = e^{-i\omega t}a$ y $a_H^\dagger = e^{i\omega t}a^\dagger$. Luego

$$Q_H(t) = \alpha e^{-i\omega t}a + \alpha^* e^{i\omega t}a^\dagger\,.$$

[1] Para cualquier operador A_H, que en representación de Schrödinger no depende del tiempo, se cumple $\frac{dA_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_H, A_H]$, siendo H_H el hamiltoniano del sistema en la representación de Heisenberg.

Entonces, el valor medio de Q en representación de Heisenberg queda

$$\langle\psi_H|Q_H(t)|\psi_H\rangle = \langle\psi(0)|\alpha e^{-i\omega t}a + \alpha^* e^{i\omega t}a^\dagger|\psi(0)\rangle = ... = \lambda^*\alpha^*\gamma e^{i\frac{t}{\hbar}(E_1-E_0)} + \gamma^*\alpha\lambda e^{-i\frac{t}{\hbar}(E_1-E_0)},$$

que coincide con lo hallado en el inciso anterior. Como demostramos en clase, el valor medio no depende de la representación utilizada.

$\boxed{3}$ *(2 puntos) Considere un rotor rígido simétrico, cuyo hamiltoniano está dado por*

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_\rho} + \frac{L_z^2}{2I_z}\,, \quad \textit{con } I_\rho \geq I_z > 0\,.$$

(a) *Hallar el espectro de energía y demostrar que hay niveles degenerados. Hallar la degeneración de cada nivel de energía en el caso en que $I_\rho = I_z$.*

Escribiendo $L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2$, vemos que H es una combinación lineal de L^2 y L_z^2, por lo que los autoestados comunes a L^2 y L_z también serán autoestados de H. Sea $|l,m\rangle$ tal que $L^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle$ y $L_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$. Luego, resulta

$$H|l,m\rangle = \left(\frac{L^2 - L_z^2}{2I_\rho} + \frac{L_z^2}{2I_z}\right)|l,m\rangle = \left(\frac{\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2}{2I_\rho} + \frac{\hbar^2 m^2}{2I_z}\right)|l,m\rangle\,,$$

y vemos que $|l,m\rangle$ es un autoestado de H con energía $E_{l,m} = \frac{\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2}{2I_\rho} + \frac{\hbar^2 m^2}{2I_z}$. Para todo $l \neq 0$, vemos que $E_{l,m} = E_{l,-m}$; esto demuestra que los estados $|l,m\rangle$ y $|l,-m\rangle$ tienen la misma energía $E_{l,m}$ (es decir, que hay niveles degenerados).

En el caso en que $I_\rho = I_z$, tenemos

$$E_{l,m} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I_\rho} = E_l\,,$$

que no depende de m. Como para cada l hay $2l+1$ valores posibles de m, la degeneración del nivel asociado a la energía E_l es $2l+1$.

(b) *Se realizan sobre el sistema mediciones sucesivas de los siguientes observables: $\{\boldsymbol{L}^2, L_x, \boldsymbol{L}^2, L_z\}$, arrojando dichas mediciones los resultados: $\{6\hbar^2, 2\hbar, 6\hbar^2, \hbar\}$. ¿Cuál es el estado del sistema después de la última medición? Hallar la dispersión de L_x en dicho estado.*

Las únicas mediciones que importan en este caso son las últimas dos, ya que L_z y L_x no conmutan. Si al medir L^2 se obtuvo $6\hbar^2$, esto nos dice que $l = 2$ (ya que $2.(2+1) = 6$). Cuando se mide L_z al final, no cambia el valor de l ya que L^2 y L_z conmutan. Si al medir L_z se obtuvo $\hbar$, esto nos dice que $m = 1$. Luego, el estado del sistema inmediatamente después de la última medición es $|2,1\rangle$.

Para hallar la dispersión de L_x en el estado $|2,1\rangle$ es conveniente recordar que $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ (y recordar que $L_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}|l,m\pm1\rangle$). El valor medio de L_x es nulo, ya que $L_x|2,1\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|2,1\rangle = C_1|2,2\rangle + C_2|2,0\rangle$ (C_1, C_2 son ciertas constantes), que es ortogonal a $|2,1\rangle$. Por lo tanto,

$$(\Delta L_x)^2 = \langle L_x^2\rangle = \frac{1}{4}\langle L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+\rangle = \frac{1}{4}\langle L_+L_- + L_-L_+\rangle = \frac{1}{4}\left(\| L_-|2,1\rangle \|^2 + \| L_+|2,1\rangle \|^2\right)\,,$$

donde ya hemos previsto que será $\langle L_+^2\rangle = \langle L_-^2\rangle = 0$, ya que los estados obtenidos al aplicar L_+^2 y L_-^2 sobre $|2,1\rangle$ serán respectivamente el estado nulo y un estado proporcional a $|2,-1\rangle$ (que es ortogonal a $|2,1\rangle$). Así, sólo resta hallar

$$\| L_+|2,1\rangle \|^2 = \hbar^2\left[2(2+1) - 1(1+1)\right] = 4\hbar^2\,,$$

y

$$\| L_-|2,1\rangle \|^2 = \hbar^2\left[2(2+1) - 1(1-1)\right] = 6\hbar^2\,.$$

Finalmente

$$(\Delta L_x) = \sqrt{\frac{1}{4}\left(6\hbar^2 + 4\hbar^2\right)} = \sqrt{\frac{5}{2}}\hbar\,.$$

$\boxed{4}$ *(2.5 puntos)* Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) *Una partícula libre se encuentra en el estado $\psi(x) = A\cos(kx) + A\,\mathrm{sen}(2kx)$ (A, k son constantes reales). Entonces, si se mide el momento lineal de la partícula sólo se podrán obtener (con probabilidad no nula) los valores $p = \pm\hbar k$ y $p = \pm 2\hbar k$.*

El enunciado es **verdadero**. Las autofunciones del momento lineales son exponenciales

$$pe^{ip_0x} = -i\hbar\frac{d}{dx}\left(e^{ip_0x}\right) = p_0e^{ip_0x}\,,$$

donde vemos que el autovalor de p asociado a la autofunción e^{ip_0x} es p_0. Notemos que el estado del sistema es una combinación lineal de autofunciones del momento

$$\psi(x) = A\cos(kx) + A\,\mathrm{sen}(2kx) = \frac{A}{2}e^{ikx} + \frac{A}{2}e^{-ikx} + \frac{B}{2i}e^{2ikx} - \frac{B}{2i}e^{-2ikx}\,.$$

Estas autofunciones corresponden a los autovalores de momento $p = \pm\hbar k$ y $p = \pm 2\hbar k$, por lo que una medición del momento lineal para este estado sólo podrá resultar en alguno de esos valores con probabilidad no nula.

(b) *Se tiene una partícula de masa m sometida al potencial del oscilador armónico unidimensional con frecuencia de oscilación ω. A tiempo $t = 0$, el sistema se encuentra en un estado para el cual una medición de la energía puede resultar solamente en los valores $\hbar\omega/2$ y $3\hbar\omega/2$ con la misma probabilidad, y en el que el valor medio del momento es igual a $(m\omega\hbar/2)^{1/2}$. Esta información determina completamente el estado del sistema a $t = 0$.*

El enunciado es **verdadero**. Si sólo se pueden obtener los valores de energía $\hbar\omega/2$ y $3\hbar\omega/2$, el estado del sistema es una combinación lineal de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Como además sabemos que la probabilidad de hallar esos dos valores de energía es la misma, recordando además que el estado debe estar normalizado, podemos afirmar que tendrá la forma

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\alpha}|1\rangle\right)\,,$$

para cierto α real (utilizamos el hecho de que dos vectores que difieren en una fase global representan el mismo estado físico). Para este estado, el valor medio del momento está dado por

$$\langle p\rangle = \langle\phi|i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right)|\phi\rangle = ... = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\mathrm{sen}(\alpha)\,.$$

Por otro lado, el enunciado nos dice que $\langle p\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$. Entonces, debe ser $\mathrm{sen}(\alpha) = 1$, lo que nos da $\alpha = \pi/2 + 2\pi n$ (con n entero). Esto determina completamente el estado, ya que $e^{i(\pi/2+2\pi n)} = i$, y por lo tanto, resulta

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right)\,.$$

(c) *Se tiene una partícula sin espín, cuyo hamiltoniano no depende del tiempo y es tal que $[H, L_z] = 0$. Entonces, los niveles de energía no dependen de m (m es el autovalor de $L_z/\hbar$).*

El enunciado es **falso**. Un contraejemplo está dado por el problema 3 de este examen, donde se ve que $[H, L_z] = 0$ y sin embargo los niveles de energía dependen de m.