

Por favor: resolver cada problema en hojas separadas e indicar el nombre en todas ellas.

- 1 (2.5 puntos) Cierta sistema cuántico de cuatro partículas (distinguibles), todas de espín $1/2$, tiene un hamiltoniano dado por

$$H_0 = -\gamma (\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 + \bar{S}_2 \cdot \bar{S}_3 + \bar{S}_3 \cdot \bar{S}_4 + \bar{S}_4 \cdot \bar{S}_1),$$

donde γ es una constante positiva y \bar{S}_i es el operador espín de la partícula i -ésima ($i = 1, 2, 3, 4$).

- ¿Cuál es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema?
- Hallar los niveles de energía y su correspondiente degeneración (no es necesario escribir explícitamente los autoestados).
- Se realizan sobre el sistema mediciones de \mathbf{S}^2 y S_z (siendo \mathbf{S} el operador espín total del sistema) y se obtienen los valores $2\hbar^2$ y \hbar respectivamente. ¿Es esta información suficiente para determinar el estado del sistema luego de estas mediciones?

- 2 (3 puntos) Encuentre la corrección a la energía del nivel $1s$ del átomo de Hidrógeno $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$ generada por los términos de estructura fina $H_f = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{e^2}{m^2c^2} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{r^3} + \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\mathbf{r})$ a primer orden en teoría de perturbaciones.

- 3 (2 puntos) Considere un potencial dado por

$$V(r) = -V_0/r^{\alpha+1}$$

donde V_0 y α son constantes positivas.

- Grafique $V(r)$ cualitativamente y compárelo con el potencial de Coulomb $-\frac{V_0}{r}$.
- Calcule la sección eficaz diferencial de scattering para una partícula de energía E y masa m en la aproximación de Born.
- ¿Qué espera obtener para $\alpha \rightarrow 0$?

- 4 (2.5 puntos) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

- Se dice que un estado $|\psi\rangle$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ está **entrelazado** si no existen $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ tales que $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Con esta definición, el estado singlete de espín asociado a dos electrones es entonces un estado entrelazado.
- Un oscilador armónico unidimensional se encuentra en el estado fundamental para $t < 0$. A tiempos positivos se lo somete a una fuerza perturbativa $F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$ en la dirección x . Después de un tiempo, será posible encontrar al sistema en el tercer estado excitado del oscilador armónico no perturbado (trabajar a primer orden en teoría de perturbaciones).
- Se tiene un sistema con hamiltoniano $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha L_z + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$. Entonces, resulta

$$\langle 0|(x^2 + y^2)z|0\rangle = 0.$$

Algunas expresiones que podrían resultar útiles (o no...)

(a) **Átomo de Hidrógeno**

- i- Energías del átomo de Hidrógeno H_0 : $E_n = -\frac{E_I}{n^2}$, con $E_I = \frac{me^4}{2\hbar^2}$.
- ii- Estado fundamental de H_0 : $\psi_{1,0,0}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-r/a_0}}{(\pi a_0^3)^{1/2}}$, siendo $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$.
- iii- Algunas integrales:
 - $\int d^3\mathbf{r} \frac{1}{r} |\psi_{1,0,0}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{a_0}$.
 - $\int d^3\mathbf{r} \frac{1}{r^2} |\psi_{1,0,0}(\mathbf{r})|^2 = \frac{2}{a_0^2}$.

(b) **Oscilador armónico unidimensional**

- i- Operador de destrucción: $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right)$.

(c) **Algunas integrales**

- i- Si $f(\mathbf{r}) = f(r)$ (depende sólo del módulo de \mathbf{r}) entonces

$$\int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(r) = \frac{4\pi}{|\mathbf{k}|} \int_0^{+\infty} dr r \text{sen}(|\mathbf{k}|r) f(r).$$

ii- $\int_0^{+\infty} dx \text{sen}(\beta x) / x^\alpha = \beta^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(1-\alpha)$

(d) **Tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan**

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	...
M	M	...

m_1	m_2
m_1	m_2
...	...

 Coefficients

$1/2 \times 1/2$

1	0
+1/2	1/2
-1/2	1/2
0	0

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	+3/2
-1/2	1/2
1/5	4/5
4/5	-1/5

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$1 \times 1/2$

3/2	1/2
+3/2	+1/2
-1/2	1/3
2/3	-1/3

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	+3/2
-1/2	1/2
2/5	3/5
3/5	-2/5

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

2×1

3	2
+3	+2
-1	1/2
1/3	2/3
2/3	-1/3

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	+3/2
-1/2	1/2
2/5	3/5
3/5	-2/5

1×1

2	1
+2	+1
-1	1/2
1/2	-1/2

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	+3/2
-1/2	1/2
2/5	3/5
3/5	-2/5

$$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M \rangle$$

1) Cierta sistema cuántico de cuatro partículas (distinguidas), todas de espín 1/2, tiene un hamiltoniano dado por

$$H_0 = -\gamma(\bar{S}_1\bar{S}_2 + \bar{S}_2\bar{S}_3 + \bar{S}_3\bar{S}_4 + \bar{S}_4\bar{S}_1)$$

donde γ es una constante positiva y S_i es el operador espín de la partícula i -ésima ($i=1,2,3,4$).

(a) ¿Cuál es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema?

(b) Hallar los niveles de energía y su correspondiente degeneración (no es necesario escribir explícitamente los autoestados).

(c) Se realizan sobre el sistema mediciones de S^2 y S_z (siendo S el operador espín total del sistema) y se obtienen los valores $2\hbar^2$ y \hbar respectivamente. ¿Es esta información suficiente para determinar el estado del sistema luego de estas mediciones?

(a) Para contestar la primera pregunta tenemos que recordar las clases sobre sistemas compuestos y producto tensorial. El sistema se compone de cuatro partículas de espín 1/2, cada partícula puede estar en estado de espín up ($|+\rangle, |\uparrow\rangle$) o de espín down ($|-\rangle, |\downarrow\rangle$) y por lo tanto el espacio de estados de cada partícula tiene 2 estados linealmente independientes, y en consecuencia dimensión 2.

$$Dim(\mathcal{H}_i) = 2$$

Sabemos además que el espacio de Hilbert del sistema compuesto será el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada partícula

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4$$

y en consecuencia

$$Dim(\mathcal{H}) = Dim(\mathcal{H}_1).Dim(\mathcal{H}_2).Dim(\mathcal{H}_3).Dim(\mathcal{H}_4) = 2^4 = 16$$

La dimensión del espacio de Hilbert corresponde a la cantidad de vectores linealmente independientes que generan el espacio. Los axiomas de la mecánica cuántica postulan que los vectores (rayos, en realidad) del espacio de Hilbert representan estados del sistema. Entonces, la dimensión del espacio de Hilbert corresponde a la cantidad de estados diferentes en los que puedo encontrar un sistema.

(b) El segundo ítem nos pide que hallemos los niveles de energía con su correspondiente degeneración

Lo que puede estar degenerado (o no) no es el sistema ni es un operador, sino el espectro de un operador (sus autovalores). Decimos que un autovalor de un determinado operador está degenerado cuando existe más de un autovector para un mismo autovalor.

Queremos entonces encontrar los distintos autovalores de H_0 , que corresponden a las distintas energías que puede tener el sistema. Para encontrarlas de forma fácil, nos gustaría reescribir H_0 en términos de operadores para los cuales conozca los autovalores posibles (por ejemplo, no puedo saber cuáles son los autovalores de $\bar{S}_1\bar{S}_2$ sin escribir la matriz en alguna base y diagonalizarla, pero sé cuáles son los autovalores de S_1^2 y sus correspondientes autovectores sin necesidad de hacer cuentas).

Si definimos por ejemplo el operador $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \bar{S}_4$

$$\begin{aligned} S^2 &= (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 2\bar{S}_1\bar{S}_2 + 2\bar{S}_2\bar{S}_3 + 2\bar{S}_3\bar{S}_4 + 2\bar{S}_4\bar{S}_1 + 2\bar{S}_1\bar{S}_3 + 2\bar{S}_2\bar{S}_4 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 2\frac{H_0}{-\gamma} + 2\bar{S}_1\bar{S}_3 + 2\bar{S}_2\bar{S}_4 \end{aligned}$$

Donde usamos que los operadores S_i conmutan porque actúan sobre diferentes sistemas para juntar los términos $S_iS_j + S_jS_i = 2S_iS_j$ y la expresión de H_0 para reemplazar varios de los términos. Todavía sobreviven

dos de los términos cruzados que me molestan. Notando que estos términos que nos molestan surgirían al expandir $(\bar{S}_1 + \bar{S}_3)^2$ y $(\bar{S}_2 + \bar{S}_4)^2$, podemos definir $S_{13} = \bar{S}_1 + \bar{S}_3$ y $S_{24} = \bar{S}_2 + \bar{S}_4$

$$\begin{aligned} S_{24}^2 &= (\bar{S}_2 + \bar{S}_4)^2 \\ &= S_2^2 + S_4^2 + 2\bar{S}_2\bar{S}_4 \\ S_{13}^2 &= (\bar{S}_1 + \bar{S}_3)^2 \\ &= S_1^2 + S_3^2 + 2\bar{S}_1\bar{S}_3 \end{aligned}$$

Y todos estos términos aparecen en la expansión que hicimos de S^2 !

$$\begin{aligned} S^2 &= (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 2\bar{S}_1\bar{S}_2 + 2\bar{S}_2\bar{S}_3 + 2\bar{S}_3\bar{S}_4 + 2\bar{S}_4\bar{S}_1 + 2\bar{S}_1\bar{S}_3 + 2\bar{S}_2\bar{S}_4 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 2\frac{H_0}{-\gamma} + 2\bar{S}_1\bar{S}_3 + 2\bar{S}_2\bar{S}_4 \\ &= 2\frac{H_0}{\gamma} + S_{13}^2 + S_{24}^2 \end{aligned}$$

de donde podemos despejar

$$H_0 = \frac{-\gamma}{2}(S^2 - S_{13}^2 - S_{24}^2) \quad (0.1)$$

y tenemos finalmente el hamiltoniano escrito en términos de operadores cuyos autovalores conocemos. S_{13} y S_{24} son operadores suma de momentos angulares, sabemos entonces que

$$-|s_1 - s_3| \leq s_{13} \leq s_1 + s_3 \quad (0.2)$$

$$S_{13}^2 |s_{13}, m_{s_{13}}\rangle = \hbar^2 s_{13}(s_{13} + 1) |s_{13}, m_{s_{13}}\rangle \quad (0.3)$$

y similarmente para S_{24} . Como $s_i = \frac{1}{2}$, tanto s_{13} como s_{24} pueden tomar dos valores 0 (1 estado), o 1 (3 estados). Y estos valores son independientes, uno depende de como acoplen las oartículas 1 y 3, mientras que el otro depende de 2 y 4. A su vez $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \bar{S}_4 = \bar{S}_{13} + \bar{S}_{24}$ lo que corresponde a acoplar dos momentos angulares (0,0), (1,0), (0,1) o (1,1), según sean s_{13} y s_{24} . Consideremos todas las posibilidades

$$\begin{aligned} \text{Si } s_{13} = s_{24} = 0 &\implies |0 - 0| \leq s \leq 0 + 0 \implies s = 0 \text{ (1 estado)} \\ \text{Si } s_{13} = 1, s_{24} = 0 &\implies |0 - 1| \leq s \leq 0 + 1 \implies s = 1 \text{ (3 estados)} \\ \text{Si } s_{13} = 0, s_{24} = 1 &\implies |1 - 0| \leq s \leq 1 + 0 \implies s = 1 \text{ (3 estados)} \\ \text{Si } s_{13} = 1, s_{24} = 1 &\implies |1 - 1| \leq s \leq 1 + 1 \implies \begin{aligned} &s = 0 \quad \text{(1 estado)} \\ &s = 1 \quad \text{(3 estados)} \\ &s = 2 \quad \text{(5 estados)} \end{aligned} \end{aligned}$$

Si pensamos originalmente los estados del sistema en la base *desacoplada*, podemos escribirlos como $\{|s_1, s_2, s_3, s_4, m_1, m_2, m_3, m_4\rangle\}$. Otra base posible para los estados de este sistema, basada en los operadores que aparecen ahora en H_0 es $\{|s_{13}, s_{24}, s, m_s\rangle\}$, que puedo escribir en forma simplificada como $\{|s_{13}, s_{24}, s, m_s\rangle\}$. Pero cualquiera sea la base que considere, siempre tiene que tener 16 vectores distintos (es decir, 16 estados del sistema distintos), sino no puedo generar un espacio de dimensión 16!

Conociendo los valores que pueden tomar s_{13} , s_{24} y s calcular las energías es fácil, además ya sabemos que cantidad de estados tienen cada combinación de valores de s_{13} , s_{24} y s .

$$E_{s_{13}, s_{24}, s} = \frac{-\gamma\hbar^2}{2} (s(s+1) - s_{13}(s_{13}+1) - s_{24}(s_{24}+1))$$

$$E_{0,0,0} = \frac{-\gamma\hbar^2}{2} \times 0 = 0 \text{ (1 estado)}$$

$$E_{1,0,1} = \frac{-\gamma\hbar^2}{2}(2 - 0 - 2) = 0(3\text{estados})$$

$$E_{1,1,0} = \frac{-\gamma\hbar^2}{2}(2 - 2 - 0) = 0(3\text{estados})$$

$$E_{0,1,1} = \frac{-\gamma\hbar^2}{2}(0 - 2 - 2) = 2\gamma\hbar^2(1\text{estado})$$

$$E_{1,1,1} = \frac{-\gamma\hbar^2}{2}(2 - 2 - 2) = \gamma\hbar^2(3\text{estados})$$

$$E_{2,1,1} = \frac{-\gamma\hbar^2}{2}(6 - 2 - 2) = -\gamma\hbar^2(5\text{estados})$$

Con esta información el ítem 2 queda resuelto con el siguiente resultado (usamos g para la degeneración)

$$E = 0 \longrightarrow g = 7$$

$$E = -\gamma\hbar^2 \longrightarrow g = 5$$

$$E = \gamma\hbar^2 \longrightarrow g = 3$$

$$E = 2\gamma\hbar^2 \longrightarrow g = 1(\text{no degenerado})$$

Como la degeneración corresponde a la cantidad de estados (vectores del Hilbert) para los cuales la energía (el autovalor de H_0) es la misma, sumar todas las degeneraciones tiene que dar la cantidad total de estados, es decir, tiene que coincidir la suma de las degeneraciones con la dimensión hallada en el ítem (a)

(c) El ítem (c) nos dice que se realizamos dos mediciones sobre el sistema, de forma que conocemos los valores de S^2 y S_z , como estos dos operadores conmutan puedo medir ambos valores y permanecer en un mismo estado. La información que tenemos nos permite decir que

$$S^2 |s_{13}, s_{24}, s, m_s\rangle = 2\hbar^2 |s_{13}, s_{24}, s, m_s\rangle \longrightarrow |s_{13}, s_{24}, s, m_s\rangle = |s_{13}, s_{24}, 1, m_s\rangle$$

$$S_z |s_{13}, s_{24}, 1, m_s\rangle = \hbar |s_{13}, s_{24}, 1, m_s\rangle \longrightarrow |s_{13}, s_{24}, 1, m_s\rangle = |s_{13}, s_{24}, 1, 1\rangle$$

Pero estos dos valores no determinan por completo el estado, ya que existe más de una combinación de valores s_{13}, s_{24} que se suman a $s = 1$. (Analizamos esto cuando queríamos encontrar las energías, hay 9 estados distintos que tienen $s = 1$, es cierto que no todos tienen $m=1$, pero hay tres de ellos que si.)

Ejercicio 2 Encuentre la corrección a la energía del nivel $1s$ del átomo de Hidrógeno $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$ generada por los términos de estructura fina $H_f = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{e^2}{m^2c^2} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{r^3} + \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\mathbf{r})$ a primer orden en teoría de perturbaciones.

El nivel $1s$ está formado por los estados $|1, 0, 0\rangle \otimes |\pm\rangle$, donde $|n, \ell, m\rangle$ son los autoestados de H_0 y $|\pm\rangle$ los autoestados comunes a \mathbf{s}^2 y s_z . Como los dos estados del nivel tienen la misma energía (depende sólo de n) tenemos que utilizar teoría de perturbaciones para niveles degenerados, es decir, debemos hallar la matriz de la perturbación H_f en el nivel $1s$ y sus autovalores serán las correcciones a la energía. De los tres términos en H_f , sólo el de espín-órbita involucra al operador

de espín. Sin embargo, es sencillo ver que la matriz de este término en el subespacio $1s$ es nula, ya que en dicho subespacio es $\ell = 0$ (por lo que será $\langle 1, 0, 0 | L_x | 1, 0, 0\rangle = \langle 1, 0, 0 | L_y | 1, 0, 0\rangle = \langle 1, 0, 0 | L_z | 1, 0, 0\rangle = 0$). Por lo tanto, el término de espín-órbita no introduce correcciones a la energía de este nivel. Como los otros dos sumandos en H_f no involucran explícitamente al

operador de espín y los dos estados del nivel $1s$ tienen la misma parte orbital, podemos asegurar que la matriz del operador $-\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\mathbf{r})$ en el nivel $1s$ será diagonal y proporcional a la matriz identidad (es decir, sólo tenemos que calcular un valor de expectación para determinarla, por ejemplo el valor de expectación del operador en el estado $|1, 0, 0\rangle$). Comenzamos por el término

de Darwin, que es el más sencillo

$$\langle 1, 0, 0 | \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\mathbf{r}) | 1, 0, 0\rangle = \int d^3\mathbf{r} |\psi_{1,0,0}(\mathbf{r})|^2 \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\mathbf{r}) = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} |\psi_{1,0,0}(\mathbf{0})|^2,$$

y el valor de $\psi_{1,0,0}(\mathbf{0}) = \frac{m^3 e^6}{\pi \hbar^6}$ se puede obtener de la forma explícita de $\psi_{1,0,0}$ que estaba dada en la hoja de fórmulas. Así, la matriz del término de Darwin $W_D = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\mathbf{r})$ en el subespacio $1s$ queda

$$[W_D]_{1s} = \frac{m e^8}{2 \hbar^4 c^2} I_{2 \times 2},$$

siendo $I_{2 \times 2}$ la matriz identidad de orden 2.

Como mencionamos anteriormente, el término $W_{mv} = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}$ también es diagonal y proporcional a $I_{2 \times 2}$ en el subespacio $1s$. Entonces, nos alcanza con calcular por ejemplo

$$\langle 1, 0, 0 | W_{mv} | 1, 0, 0\rangle = -\frac{1}{8m^3c^2} \langle 1, 0, 0 | \mathbf{p}^4 | 1, 0, 0\rangle.$$

Para hallar $\langle 1, 0, 0 | \mathbf{p}^4 | 1, 0, 0\rangle$ nos conviene reescribirlo en términos de H_0 (ya que $|1, 0, 0\rangle$ es autoestado de H_0 con autovalor $E_1 = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2}$)

$$\mathbf{p}^4 = [2m(H_0 - V)]^2 = 4m^2(H_0^2 - H_0V - VH_0 + V^2),$$

siendo $V = -\frac{e^2}{r}$. Tenemos entonces

$$\langle 1, 0, 0 | \mathbf{p}^4 | 1, 0, 0\rangle = \langle 1, 0, 0 | 4m^2(H_0^2 - H_0V - VH_0 + V^2) | 1, 0, 0\rangle = 4m^2 \left(E_1^2 + 2e^2 E_1 \langle \frac{1}{r} \rangle + e^4 \langle \frac{1}{r^2} \rangle \right),$$

donde los valores de expectación se calculan en el estado $|1, 0, 0\rangle$ (estaban dados en las hojas de fórmulas, resultan $\langle \frac{1}{r} \rangle = \frac{1}{a_0}$ y $\langle \frac{1}{r^2} \rangle = \frac{2}{a_0^2}$). Teniendo esto en cuenta, se llega a que la matriz de W_{mv} en el subespacio $1s$ es

$$[W_{mv}]_{1s} = -\frac{5me^8}{8\hbar^4c^2}I_{2 \times 2}.$$

Sumando las contribuciones, obtenemos finalmente

$$[H_f]_{1s} = -\frac{me^8}{8\hbar^4c^2}I_{2 \times 2},$$

lo que nos dice que la corrección de estructura fina, a primer orden en teoría de perturbaciones, disminuye la energía del nivel $1s$ en el valor $-\frac{me^8}{8\hbar^4c^2}$ pero no rompe con la degeneración del nivel.

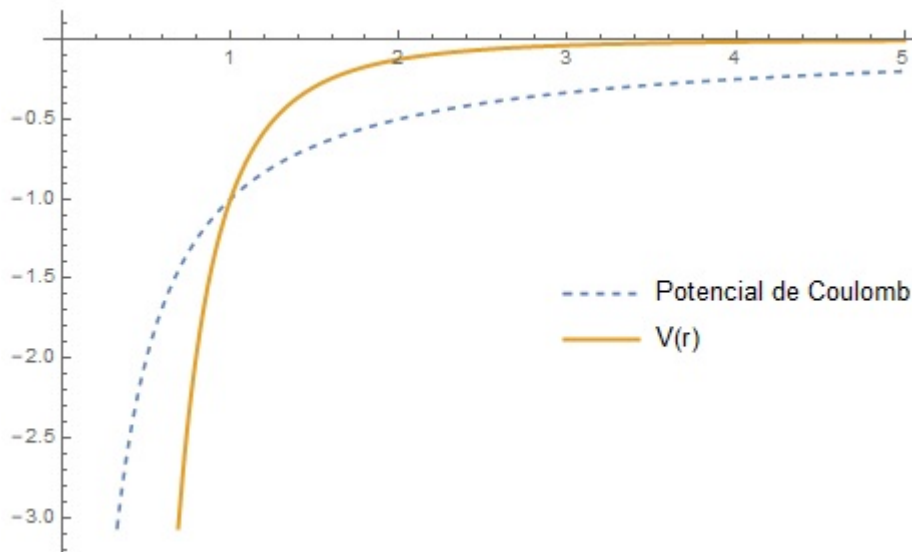
Ejercicio 3 Considere un potencial dado por

$$V(r) = -V_0/r^{\alpha+1}$$

donde V_0 y α son constantes positivas.

(a) Grafique $V(r)$ cualitativamente y compárelo con el potencial de Coulomb $-\frac{V_0}{r}$.

Para α positivo, el potencial del ejercicio decae más rápido en el infinito que el potencial de Coulomb. Sin embargo, para r tendiendo a cero, el potencial de Coulomb es más divergente. Esto nos da el gráfico esquemático de la figura.



(b) Calcule la sección eficaz diferencial de scattering para una partícula de energía E y masa m en la aproximación de Born.

La amplitud de scattering en la aproximación de Born queda dada por

$$f^{(B)}(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(r) = \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{r^{\alpha+1}}$$

donde el momento transferido q se relaciona con el inicial k por $|\mathbf{q}| = 2k\text{sen}(\theta/2)$, ya que el scattering es elástico. Las integrales angular se puede hacer utilizando una de las fórmulas dadas en la hoja del examen ya que el potencial no depende de los ángulos

$$f^{(B)}(\theta, \phi) = \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{r^{\alpha+1}} = \frac{2mV_0}{\hbar^2|\mathbf{q}|} \int_0^{+\infty} dr \text{sen}(|\mathbf{q}|r) \frac{1}{r^\alpha}$$

y luego queda realizar la integración en r que también se realiza utilizando la hoja de fórmulas del parcial

$$f^{(B)}(\theta, \phi) = \frac{2mV_0}{\hbar^2|\mathbf{q}|} \int_0^{+\infty} dr \text{sen}(|\mathbf{q}|r) \frac{1}{r^\alpha} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} |\mathbf{q}|^{\alpha-2} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(1-\alpha)$$

Finalmente, tomando el módulo cuadrado de la amplitud de scattering llegamos al resultado para la sección eficaz diferencial en la aproximación de Born

$$\sigma^{(B)}(\theta, \phi) = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4} |\mathbf{q}|^{2\alpha-4} \cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(1-\alpha)^2,$$

donde la dependencia angular viene dada por la relación $|\mathbf{q}| = 2k\sin(\theta/2)$.

Recordando que $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ se puede analizar que el resultado es coherente con los límites de E , m , V_0 grandes y pequeños.

(c) *¿Qué espera obtener para $\alpha \rightarrow 0$?*

En el límite $\alpha \rightarrow 0$ el potencial coincide con el de Coulomb, pero en principio nuestras ecuaciones no son válidas para ese potencial, ya que no es de corto alcance. Sin embargo, podemos verificar explícitamente que en el límite $\alpha \rightarrow 0$, la sección eficaz diferencial en la aproximación de Born tiende al resultado para el scattering clásico del potencial de Coulomb.

4) a) Verdadero

Estado singlete $\frac{|1/2 \ -1/2\rangle - |-1/2 \ 1/2\rangle}{\sqrt{2}} = |0, 0\rangle$

Estado triplete $\begin{cases} |1/2 \ 1/2\rangle = |1, 1\rangle \\ |1/2 \ -1/2\rangle + |-1/2 \ 1/2\rangle = |1, 0\rangle \\ |-1/2 \ -1/2\rangle = |1, -1\rangle \end{cases}$

Queremos ver si $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2 \ -1/2\rangle - |-1/2 \ 1/2\rangle)$ es un estado entrelazado.

Es decir, queremos ver si $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ para algunos $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$.

Ojo si bien en este caso es bastante evidente, no basta con decir que están entrelazados porque hay una suma de tensores.

Em efecto, $|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2 \ 1/2\rangle + |-1/2 \ -1/2\rangle)$ también es una suma pero $|\psi'\rangle = (|1/2\rangle + |-1/2\rangle) \otimes |1/2\rangle$

Supongamos que existen tales $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$

$$|\psi_1\rangle = a_1 |1/2\rangle + b_1 |-1/2\rangle \quad |\psi_2\rangle = a_2 |1/2\rangle + b_2 |-1/2\rangle$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = a_1 a_2 |1/2 \ 1/2\rangle + a_1 b_2 |1/2 \ -1/2\rangle + b_1 a_2 |-1/2 \ 1/2\rangle + b_1 b_2 |-1/2 \ -1/2\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a_1 a_2 = 0 \\ b_1 a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ a_1 b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 0 \quad \text{ó} \quad a_2 = 0 \\ 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ABS!} \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l} a_2 = 0 \\ 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ABS!} \end{array}$$

\Rightarrow No existen tales $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, el estado singlete está entrelazado

$$\begin{aligned}\langle 0 | (x^2 + y^2) z | 0 \rangle &= \langle 0 | x x z | 0 \rangle + \langle 0 | y y z | 0 \rangle \quad \downarrow \text{Identidades} \\ &= \langle 0 | \underbrace{\pi x \pi \pi x \pi \pi z \pi \pi}_{} | 0 \rangle + \langle 0 | \underbrace{\pi y \pi \pi y \pi \pi z \pi \pi}_{} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \varepsilon (-x) (-x) (-z) \varepsilon | 0 \rangle + \langle 0 | \varepsilon (-y) (-y) (-z) \varepsilon | 0 \rangle \\ &= -\cancel{\varepsilon}^2 \langle 0 | x^2 z | 0 \rangle - \cancel{\varepsilon}^2 \langle 0 | y^2 z | 0 \rangle \\ &= - \langle 0 | (x^2 + y^2) z | 0 \rangle\end{aligned}$$

$$a = -a \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow \langle 0 | (x^2 + y^2) z | 0 \rangle = 0$$