Espacios de Hilbert $\mathscr{H}$

Espacio de Hilbert: un espacio vectorial con producto escalar que es completo.

Dimensión finita: todo $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ se puede desarrollar en base ortonormal $\{|\, i\,\rangle\}$.

$$|\,\psi\,\rangle = \sum_i^n c_i\,|\,i\,\rangle \qquad \longleftarrow \qquad \text{desarrollo en la base}$$

$$c_i = \langle\, i\,|\,\psi\,\rangle \qquad \longleftarrow \qquad \text{coeficientes del desarrollo}$$

$$\sum_i^n |\,i\,\rangle\langle\, i\,| = \hat{1} \qquad \longleftarrow \qquad \text{completitud}$$

$$\langle\, i\,|\,j\,\rangle = \delta_{ij} \qquad \longleftarrow \qquad \text{ortonormalidad}$$

Desarrollo en serie de Fourier

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x$, y nula salvo en $0 \leq x \leq L$.

Desarrollo en serie de Fourier

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x$, y nula salvo en $0 \leq x \leq L$.

1. La serie de Fourier nos asegura que podemos expandir $\psi(x)$ en senos:

$$\psi(x) = \sum c_n \underbrace{\sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{n\pi x}{L}}_{u_n(x)} \quad \longrightarrow \quad \psi(x) = \sum c_n \, u_n(x)$$

Desarrollo en serie de Fourier

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x$, y nula salvo en $0 \leq x \leq L$.

1. La serie de Fourier nos asegura que podemos expandir $\psi(x)$ en senos:

$$\psi(x) = \sum c_n \underbrace{\sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{n\pi x}{L}}_{u_n(x)} \quad \longrightarrow \quad \psi(x) = \sum c_n \, u_n(x)$$

2. Es un desarrollo en un conjunto infinito numerable y ortonormal $\{u_n(x)/n \in \mathbb{N}\}$:

$$\int_0^L \sin \tfrac{n\pi x}{L} \; \sin \tfrac{m\pi x}{L} \, \mathrm{d}x = \tfrac{L}{2} \, \delta_{nm} \quad \longrightarrow \quad (u_n, u_m) = \int u_n^*(x) \, u_m(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{nm}$$

Desarrollo en serie de Fourier

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x$, y nula salvo en $0 \le x \le L$.

1. La serie de Fourier nos asegura que podemos expandir $\psi(x)$ en senos:

$$\psi(x) = \sum c_n \underbrace{\sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{n\pi x}{L}}_{u_n(x)} \quad \longrightarrow \quad \psi(x) = \sum c_n \, u_n(x)$$

2. Es un desarrollo en un conjunto infinito numerable y ortonormal $\{u_n(x) / n \in \mathbb{N}\}$:

$$\int_0^L \sin \tfrac{n\pi x}{L} \; \sin \tfrac{m\pi x}{L} \, \mathrm{d}x = \tfrac{L}{2} \, \delta_{nm} \quad \longrightarrow \quad (u_n, u_m) = \int u_n^*(x) \, u_m(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{nm}$$

3. Los coeficientes del desarrollo son:

$$(u_m, \psi) = \sum c_n \, (u_m, u_n) = \sum c_n \, \delta_{nm} \; = \; c_m \quad \longrightarrow \quad c_n = (u_n, \psi) = \int u_n^*(x) \, \psi(x) \, \mathrm{d}x$$

Desarrollo en serie de Fourier

Sea $\psi(x)$ real de cuadrado integrable, $\int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x$, y nula salvo en $0 \le x \le L$.

1. La serie de Fourier nos asegura que podemos expandir $\psi(x)$ en senos:

$$\psi(x) = \sum c_n \underbrace{\sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{n\pi x}{L}}_{u_n(x)} \quad \longrightarrow \quad \psi(x) = \sum c_n \, u_n(x)$$

2. Es un desarrollo en un conjunto infinito numerable y ortonormal $\{u_n(x)/n \in \mathbb{N}\}$:

$$\int_0^L \sin \tfrac{n\pi x}{L} \; \sin \tfrac{m\pi x}{L} \, \mathrm{d}x = \tfrac{L}{2} \, \delta_{nm} \quad \longrightarrow \quad (u_n, u_m) = \int u_n^*(x) \, u_m(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{nm}$$

3. Los coeficientes del desarrollo son:

$$(u_m, \psi) = \sum c_n \, (u_m, u_n) = \sum c_n \, \delta_{nm} \; = \; c_m \quad \longrightarrow \quad c_n = (u_n, \psi) = \int u_n^*(x) \, \psi(x) \, \mathrm{d}x$$

4. La relación de completitud se obtiene remplazando c_n en $\psi(x') = \sum c_n \, u_n(x')$:

$$\psi(x') = \sum \left[\int u_n^*(x) \, \psi(x) \, \mathrm{d}x\right] u_n(x') = \int \left[\sum u_n^*(x) \, u_n(x')\right] \psi(x) \, \mathrm{d}x \quad \rightarrow \quad \sum u_n^*(x) \, u_n(x') = \delta(x - x')$$

El espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable

Comparación entre base finita y base infinita discreta.

	Base finita $\mid i\,\rangle$	**Base discreta** $u_n(x)$
Desarrollo :	$\mid\psi\,\rangle = \sum_i c_i \mid i\,\rangle$	$\psi(x) = \sum c_n\, u_n(x)$
Coeficientes :	$c_i = \langle\, i \mid \psi\,\rangle$	$c_n = (u_n, \psi)$
Completitud :	$\sum_i \mid i\,\rangle\langle\, i \mid = \hat{1}$	$\sum u_n^*(x)\, u_n(x') = \delta(x-x')$
Ortonormalidad :	$\langle\, i \mid j\,\rangle = \delta_{ij}$	$(u_n\,, u_{n'}) = \delta_{nn'}$

Transformada de Fourier

1. El teorema de la Transformada de Fourier establece

$$\bar{\psi}(k) = \int \psi(x)\ \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{d}x \qquad \longleftrightarrow \qquad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k)\ \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{d}k$$

Transformada de Fourier

1. El teorema de la Transformada de Fourier establece

$$\bar{\psi}(k) = \int \psi(x)\, \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}x \qquad \longleftrightarrow \qquad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k)\, \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}k$$

2. Definiendo $v_k(x) \equiv \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, luce como un desarrollo en la base continua $\{v_k(x)/k \in \mathbb{R}\}$

$$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k)\, v_k(x)\, \mathrm{d}k \qquad \text{y} \qquad \bar{\psi}(k) = \int v_k^*(x)\, \psi(x)\, \mathrm{d}x = (v_k, \psi)$$

Transformada de Fourier

1. El teorema de la Transformada de Fourier establece

$$\bar{\psi}(k) = \int \psi(x)\, \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}x \qquad \longleftrightarrow \qquad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k)\, \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}k$$

2. Definiendo $v_k(x) \equiv \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, luce como un desarrollo en la base continua $\{v_k(x)/k \in \mathbb{R}\}$

$$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k)\, v_k(x)\, \mathrm{d}k \qquad \text{y} \qquad \bar{\psi}(k) = \int v_k^*(x)\, \psi(x)\, \mathrm{d}x = (v_k, \psi)$$

3. La relación de ortonormalidad se obtiene remplazando en $\bar{\psi}(k') = \int v_{k'}^*(x)\psi(x)\, \mathrm{d}x$

$$\bar{\psi}(k') = \int \left[\int v_{k'}^*(x) v_k(x)\, \mathrm{d}x\right] \bar{\psi}(k)\, \mathrm{d}k \quad \rightarrow \quad \int v_{k'}^*(x) v_k(x)\, \mathrm{d}x = (v_{k'}, v_k) = \delta(k - k')$$

Transformada de Fourier

1. El teorema de la Transformada de Fourier establece

$$\bar{\psi}(k) = \int \psi(x)\, \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}x \qquad \longleftrightarrow \qquad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k)\, \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}k$$

2. Definiendo $v_k(x) \equiv \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, luce como un desarrollo en la base continua $\{v_k(x)/k \in \mathbb{R}\}$

$$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k)\, v_k(x)\, \mathrm{d}k \qquad \text{y} \qquad \bar{\psi}(k) = \int v_k^*(x)\, \psi(x)\, \mathrm{d}x = (v_k, \psi)$$

3. La relación de ortonormalidad se obtiene remplazando en $\bar{\psi}(k') = \int v_{k'}^*(x) \psi(x)\, \mathrm{d}x$

$$\bar{\psi}(k') = \int \left[\int v_{k'}^*(x) v_k(x)\, \mathrm{d}x\right] \bar{\psi}(k)\, \mathrm{d}k \quad \to \quad \int v_{k'}^*(x) v_k(x)\, \mathrm{d}x = (v_{k'}, v_k) = \delta(k - k')$$

4. La relación de completitud se obtiene remplazando en $\psi(x') = \int \bar{\psi}(k)\, v_k(x')\, \mathrm{d}k$:

$$\psi(x') = \int \left[\int v_k^*(x) \psi(x)\, \mathrm{d}x\right] v_k(x')\, \mathrm{d}k = \int \left[\int v_k^*(x) v_k(x')\, \mathrm{d}k\right] \psi(x)\, \mathrm{d}x \quad \to \quad \int v_k^*(x)\, v_k(x')\, \mathrm{d}k = \delta(x - x')$$

La “base continua” $v_k(x)$

Base discreta $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$

Desarrollo : $\psi(x) = \sum c_n \, u_n(x)$

Coeficientes : $c_n = (u_n, \psi)$

Completitud : $\sum u_n^*(x) \, u_n(x') = \delta(x - x')$

Ortonormalidad : $(u_n \, , u_{n'}) = \delta_{nn'}$

La "base continua" $v_k(x)$

	Base discreta $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$	**Base continua** $\{v_k(x), k \in \mathbb{R}\}$
Desarrollo :	$\psi(x) = \sum c_n\, u_n(x)$	$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k)\, v_k(x)\, \mathrm{d}k$
Coeficientes :	$c_n = (u_n, \psi)$	$\bar{\psi}(k) = (v_k, \psi)$
Completitud :	$\sum u_n^*(x)\, u_n(x') = \delta(x-x')$	$\int v_k^*(x)\, v_k(x')\, \mathrm{d}k = \delta(x-x')$
Ortonormalidad :	$(u_n\,, u_{n'}) = \delta_{nn'}$	$(v_k\,, v_{k'}) = \delta(k-k')$

Otra “base continua”

Sean dos estados arbitrarios φ y ψ de una partícula en una caja de ancho L

$$\varphi(x) = \sum b_n\, u_n(x) \qquad \psi(x) = \sum c_n\, u_n(x) \qquad = \sum c_n \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{n\pi x}{L}$$

$$\varphi(x) = \int \bar{\varphi}(k) v_k(x)\, \mathrm{d}k \qquad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x)\, \mathrm{d}k \qquad = \int \bar{\psi}(k)\, \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}k$$

El producto interno de φ y ψ es:

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) &= \int \varphi^*(x)\, \psi(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int \bar{\varphi}^*(k)\, \bar{\psi}(k)\, \mathrm{d}k \\ &= \sum b_n^*\, c_n\end{aligned}$$

Vemos que $\psi(x)$, $\bar{\psi}(k)$, c_n, aparecen a un mismo nivel, son los números que representan un objeto abstracto ψ a la hora de hacer cuentas:

- ❑ c_n en la base $u_n(x)$
- ❑ $\bar{\psi}(k)$ en la base $v_k(x)$

Otra “base continua”

Sean dos estados arbitrarios φ y ψ de una partícula en una caja de ancho L

$$\varphi(x) = \sum b_n\, u_n(x) \qquad \psi(x) = \sum c_n\, u_n(x) \qquad = \sum c_n \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{n\pi x}{L}$$

$$\varphi(x) = \int \bar{\varphi}(k) v_k(x)\, \mathrm{d}k \qquad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x)\, \mathrm{d}k \qquad = \int \bar{\psi}(k)\, \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}k$$

$$\varphi(x) = \int \varphi(r) f_r(x)\, \mathrm{d}r \qquad \psi(x) = \int \psi(r) f_r(x)\, \mathrm{d}r$$

El producto interno de φ y ψ es:

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) &= \int \varphi^*(x)\, \psi(x)\, \mathrm{d}x = \int \varphi^*(r)\, \psi(r)\, \mathrm{d}r \\ &= \int \bar{\varphi}^*(k)\, \bar{\psi}(k)\, \mathrm{d}k \\ &= \sum b_n^*\, c_n\end{aligned}$$

Vemos que $\psi(x)$, $\bar{\psi}(k)$, c_n, aparecen a un mismo nivel, son los números que representan un objeto abstracto ψ a la hora de hacer cuentas:

- c_n en la base $u_n(x)$
- $\bar{\psi}(k)$ en la base $v_k(x)$
- $\psi(r)$ en la base $f_r(x)$

Otra “base continua”

Sean dos estados arbitrarios φ y ψ de una partícula en una caja de ancho L

$$\varphi(x) = \sum b_n\, u_n(x) \qquad \psi(x) = \sum c_n\, u_n(x) \qquad = \sum c_n \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{n\pi x}{L}$$

$$\varphi(x) = \int \bar{\varphi}(k) v_k(x)\, \mathrm{d}k \qquad \psi(x) = \int \bar{\psi}(k) v_k(x)\, \mathrm{d}k \qquad = \int \bar{\psi}(k)\, \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}k$$

$$\varphi(x) = \int \varphi(r) f_r(x)\, \mathrm{d}r \qquad \psi(x) = \int \psi(r) f_r(x)\, \mathrm{d}r \qquad = \int \psi(r)\, \delta(r-x)\, \mathrm{d}r$$

El producto interno de φ y ψ es:

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) &= \int \varphi^*(x)\, \psi(x)\, \mathrm{d}x = \int \varphi^*(r)\, \psi(r)\, \mathrm{d}r \\ &= \int \bar{\varphi}^*(k)\, \bar{\psi}(k)\, \mathrm{d}k \\ &= \sum b_n^*\, c_n\end{aligned}$$

Vemos que $\psi(x)$, $\bar{\psi}(k)$, c_n, aparecen a un mismo nivel, son los números que representan un objeto abstracto ψ a la hora de hacer cuentas:

- c_n en la base $u_n(x)$
- $\bar{\psi}(k)$ en la base $v_k(x)$
- $\psi(r)$ en la base $f_r(x)$

Base continua $f_r(x)$

$$f_r(x) = \delta(x-r)$$

$$\psi(x) = \int \psi(r)\,\delta(x-r)\,\mathrm{d}r \longrightarrow \psi(x) = \int \psi(r) f_r(x)\,\mathrm{d}r$$

$$\psi(r) = \int \delta(x-r)\,\psi(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \psi(r) = (f_r, \psi)$$

$$\int \delta(x-r)\delta(x'-r)\,\mathrm{d}r = \delta(x-x') \longrightarrow \int f_r^*(x) f_r(x')\,\mathrm{d}r = \delta(x-x')$$

$$\int \delta(x-r)\delta(x-r')\,\mathrm{d}x = \delta(r-r') \longrightarrow (f_r, f_{r'}) = \delta(r-r')$$

Base discreta $u_n(x)$	Base continua $v_k(x)$	Base continua $f_r(x)$
$u_n(x)$	$v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\,ikx}$	$f_r(x) = \delta(x-r)$
$\psi(x) = \sum c_n\, u_n(x)$	$\psi(x) = \int \bar{\psi}(k)\, v_k(x)\, \mathrm{d}k$	$\psi(x) = \int \psi(r) f_r(x)\, \mathrm{d}r$
$c_n = (u_n, \psi)$	$\bar{\psi}(k) = (v_k, \psi)$	$\psi(r) = (f_r, \psi)$
$\sum u_n^*(x)\, u_n(x') = \delta(x-x')$	$\int v_k^*(x)\, v_k(x')\, \mathrm{d}k = \delta(x-x')$	$\int f_r^*(x) f_r\,(x')\, \mathrm{d}r = \delta(x-x')$
$(u_n\, , u_{n'}) = \delta_{nn'}$	$(v_k\, , v_{k'}) = \delta(k-k')$	$(f_r\, , f_{r'}) = \delta(r-r')$

Base discreta $u_n(x)$	Base continua $v_k(x)$	Base continua $f_r(x)$
$u_n(\boldsymbol{x})$	$v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\, e^{\,i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$	$f_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r})$
$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum c_n\, u_n(\boldsymbol{x})$	$\psi(\boldsymbol{x}) = \int \bar{\psi}(\boldsymbol{k})\, v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}$	$\psi(\boldsymbol{x}) = \int \psi(\boldsymbol{r})\, f_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$
$c_n = (u_n, \psi)$	$\bar{\psi}(\boldsymbol{k}) = (v_{\boldsymbol{k}}, \psi)$	$\psi(\boldsymbol{r}) = (f_{\boldsymbol{r}}, \psi)$
$\sum u_n^*(\boldsymbol{x})\, u_n(\boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$	$\int v_{\boldsymbol{k}}^*(\boldsymbol{x})\, v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$	$\int f_{\boldsymbol{r}}^*(\boldsymbol{x})\, f_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}')\, \mathrm{d}r = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$
$(u_n\,, u_{n'}) = \delta_{nn'}$	$(v_{\boldsymbol{k}}\,, v_{\boldsymbol{k}'}) = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$	$(f_{\boldsymbol{r}}\,, f_{\boldsymbol{r}'}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

Base discreta $u_n(x)$	**Base continua $v_k(x)$**	**Base continua $f_r(x)$**
$u_n(\boldsymbol{x})$	$v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\, e^{\,i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$	$f_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r})$
$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum c_n\, u_n(\boldsymbol{x})$	$\psi(\boldsymbol{x}) = \int \bar{\psi}(\boldsymbol{k})\, v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}$	$\psi(\boldsymbol{x}) = \int \psi(\boldsymbol{r})\, f_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$
$c_n = (u_n, \psi)$	$\bar{\psi}(\boldsymbol{k}) = (v_{\boldsymbol{k}}, \psi)$	$\psi(\boldsymbol{r}) = (f_{\boldsymbol{r}}, \psi)$
$\sum u_n^*(\boldsymbol{x})\, u_n(\boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$	$\int v_{\boldsymbol{k}}^*(\boldsymbol{x})\, v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$	$\int f_{\boldsymbol{r}}^*(\boldsymbol{x})\, f_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}')\, \mathrm{d}r = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$
$(u_n\,, u_{n'}) = \delta_{nn'}$	$(v_{\boldsymbol{k}}\,, v_{\boldsymbol{k}'}) = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$	$(f_{\boldsymbol{r}}\,, f_{\boldsymbol{r}'}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

Definiendo los bras $\langle\, \boldsymbol{r} \,|$ y $\langle\, \boldsymbol{k} \,|$ como $\langle\, \boldsymbol{r} \,|\, \psi \,\rangle = \psi(\boldsymbol{r})$ y $\langle\, \boldsymbol{k} \,|\, \psi \,\rangle = \bar{\psi}(\boldsymbol{k})$

se obtienen tres desarrollos distintos para $|\, \psi \,\rangle$:

$|\, \psi \,\rangle = \sum |\, n \,\rangle\, c_n$	$|\, \psi \,\rangle = \int |\, \boldsymbol{k} \,\rangle\, \bar{\psi}(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}$	$|\, \psi \,\rangle = \int |\, \boldsymbol{r} \,\rangle\, \psi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$
$c_n = \langle\, n \,|\, \psi \,\rangle$	$\bar{\psi}(\boldsymbol{k}) = \langle\, \boldsymbol{k} \,|\, \psi \,\rangle$	$\psi(\boldsymbol{r}) = \langle\, \boldsymbol{r} \,|\, \psi \,\rangle$
$\sum |\, n \,\rangle\langle\, n \,| = \hat{1}$	$\int |\, \boldsymbol{k} \,\rangle\langle\, \boldsymbol{k} \,|\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} = \hat{1}$	$\int |\, \boldsymbol{r} \,\rangle\langle\, \boldsymbol{r} \,|\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \hat{1}$
$\langle\, n \,|\, n' \rangle = \delta_{nn'}$	$\langle\, \boldsymbol{k} \,|\, \boldsymbol{k}' \rangle = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$	$\langle\, \boldsymbol{r} \,|\, \boldsymbol{r}' \rangle = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$