Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 1: Sistemas de dimensión 2

I. Polarización de fotones

El estado de polarización de un fotón se puede describir por un vector en un espacio vectorial complejo de dimensión 2. En él se pueden definir las bases $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, correspondientes a polarización lineal en los ejes x y y, polarización lineal en los ejes x' y y' (rotados un ángulo θ respecto de x e y) y polarización circular. Los productos de dichas bases están en la siguiente tabla (por ejemplo $\langle y|R\rangle = i/\sqrt{2}$):

	$\|x\rangle$	$\|y\rangle$	$\|x'\rangle$	$\|y'\rangle$	$\|R\rangle$	$\|L\rangle$
$\langle x\|$	1	0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\langle y\|$		1	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$i/\sqrt{2}$	$-i/\sqrt{2}$
$\langle x'\|$			1	0	$e^{i\theta}/\sqrt{2}$	$e^{-i\theta}/\sqrt{2}$
$\langle y'\|$				1	$ie^{i\theta}/\sqrt{2}$	$-ie^{-i\theta}/\sqrt{2}$
$\langle R\|$					1	0
$\langle L\|$						1

A la base de polarización linear $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ se la suele denominar también como polarización horizontal y vertical, $\{|H\rangle, |V\rangle\}$. Además, para el caso en que $\theta = 45°$, la base de polarización rotada $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ se llama polarización diagonal y anti-diagonal, $\{|D\rangle, |A\rangle\}$.

P1 Considere un haz de fotones que se hacen pasar por un polarizador orientado en la dirección anti-diagonal.

(a) Si los fotones incidentes tienen polarización $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|H\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|V\rangle$, ¿cuál es la probabilidad de que un fotón sea detectado del otro lado del polarizador?

(b) Repita el ítem anterior pero si ahora el estado inicial de polarización incidente es $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|H\rangle + i\sqrt{\frac{1}{4}}|V\rangle$.

P2 Considere un haz de fotones polarizado linealmente en la dirección x.

(a) Suponga que los fotones se hacen pasar por la siguiente secuencia de polarizadores

$$\psi \to \quad x' \to \quad y \to \quad \text{Detector}$$

donde $\{x', y'\}$ es una base rotada en $\theta = 60°$ respecto de $\{x, y\}$. Escriba la probabilidad del fotón de transmitirse en cada polarizador y la probabilidad final de ser detectado.

(b) ¿Cómo cambiaría el resultado si se quitase el primer polarizador (en x')?

(c) ¿Cómo cambiaría el resultado si se cambiase el orden de los polarizadores? (primero pasa por polarizador en y y luego en x').

P3 Sea x' un eje orientado en $\theta = 30°$ respecto a x, y un haz de fotones orientados en un estado de polarización lineal ψ tal que $|\langle y|\psi\rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(a) ¿Son los datos anteriores suficientes para determinar unívocamente el estado de polarización? Escriba el estado de polarización más general posible compatible con los datos.

(b) Se hace pasar el haz por los siguientes tres polarizadores:

$$\psi \rightarrow \quad y \rightarrow \quad R \rightarrow \quad y' \rightarrow \quad \text{Detector}$$

Calcular la probabilidad de transmisión. ¿Depende el resultado de cuál de los estados escritos en (a) es el correcto?

(c) Repetir el ítem (b) si se cambia el orden de los polarizadores:

$$\psi \rightarrow \quad y' \rightarrow \quad R \rightarrow \quad y \rightarrow \quad \text{Detector}$$

¿Cambia el resultado respecto al ítem anterior? ¿Depende ahora la probabilidad de transmisión del estado en (a)? ¿Depende la probabilidad de transmisión total del orden de los polarizadores?

(d) ¿Cómo cambian los ítems anteriores si se reemplazan los polarizadores R por polarizadores L?

P4 Para un estado arbitrario $|\psi\rangle$ diga cuáles de las siguientes propiedades son ciertas siempre, a veces o nunca. Además, diga cuales dependen de como se elige el factor arbitrario de fase.

(a) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle y|\psi\rangle|^2 = 1$.

(b) $\langle x|\psi\rangle$ es real.

(c) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle x'|\psi\rangle$ son reales.

(d) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle R|\psi\rangle$ son reales.

(e) Existe un $|\phi\rangle$ tal que $\langle \phi|\psi\rangle = 0$.

(f) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle R|\psi\rangle|^2 = 1$.

(g) Si $|\langle x|\psi\rangle|^2 = |\langle \psi|\psi\rangle|^2$, entonces $|\langle x'|\psi\rangle|^2 = 1/2$ para todo θ.

Interprete los que pueda en término de los experimentos de polarización y cristales birrefringentes.

P5 (a) Muestre que el estado $|\psi\rangle = \frac{(1+i)}{2}|R\rangle + \frac{(1-i)}{2}|L\rangle$ tiene polarización lineal de las siguientes maneras:

i) Multiplique por $\langle x'|$ y encuentre para qué valor de θ, $\langle x'|\psi\rangle = 1$.

ii) Utilizando la matriz cambio de base, escriba $|\psi\rangle$ en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.

(b) A partir de la relación de completitud de la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, verifique la de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y $\{|R\rangle, |L\rangle\}$.

(c) Definimos el operador rotación mediante: $|x'\rangle = \hat{R}(\theta)|x\rangle$, $|y'\rangle = \hat{R}(\theta)|y\rangle$.

i) Escriba la representación matricial de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}, \{|R\rangle, |L\rangle\}$, y $\hat{R}(\theta)$ en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.

ii) Encuentre los autoestados y autovalores de $\hat{R}(\theta)$ y escriba su descomposición espectral.

iii) Aplicando $\hat{R}(\pi/2)$ en su forma de descomposición espectral sobre $|x'\rangle$ muestre que obtiene $|y'\rangle$.

P6 Sea un haz con N fotones por segundo descriptos por el siguiente estado de polarización:

$$|\psi\rangle = c\,(3\,|x\rangle + 4i\,|y\rangle)$$

(a) ¿Cuánto debe valer la constante c para que el estado esté apropiadamente normalizado?

(b) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador y?

(c) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador x' (orientado en un ángulo θ respecto a x)?

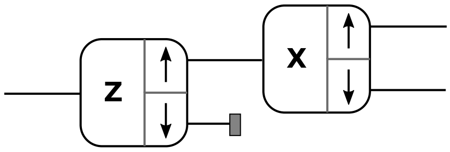
(d) Cuando un fotón está polarizado en R lleva un momento angular $\hbar$ respecto de su dirección de movimiento. Si su polarización es L posee el mismo momento angular, pero orientado en la dirección opuesta. Si el haz descripto por el estado ψ es absorbido totalmente por una superficie, ¿qué torque se ejercerá sobre la misma?

(e) ¿Qué se observa cuando se envía un solo fotón y éste es absorbido por la superficie (suponiendo que tiene un instrumento suficientemente delicado para medirlo)?

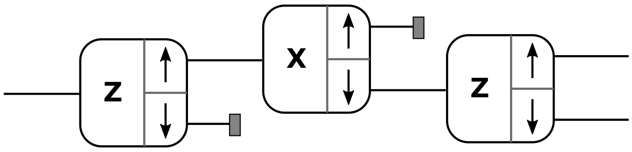
II. Spin ½

P7 Para cada una de las siguientes configuraciones de experimentos de Stern–Gerlach, calcule las probabilidades finales de medir un spin $+\hbar/2$ o $-\hbar/2$.

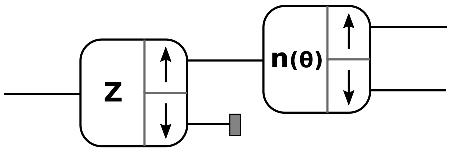
(a)



(b)



(c)



donde $\hat{\boldsymbol{n}}(\theta)$ es un versor en una dirección que forma un ángulo θ con el eje $\hat{\boldsymbol{z}}$.

P8 En un espacio vectorial complejo de dimensión 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli.*

(a) ¿Son hermíticas estas matrices? Halle sus autovalores y autovectores en esta base.

(b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
\det(\sigma_k) &= -1\\
\mathrm{tr}(\sigma_k) &= 0\\
\sigma_i^2 &= \mathbb{I}\\
\sigma_j\sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + \mathbb{I}\delta_{jk}\\
[\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k\\
\{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}\mathbb{I}\,,
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{I}$ representa a la matriz identidad, $k = 1, 2, 3$ $(\equiv x, y, z)$, ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

(c) Utilizando las propiedades anteriores muestre que dados dos vectores $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$, vale que

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\,\mathbb{I} + i(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{\sigma}$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

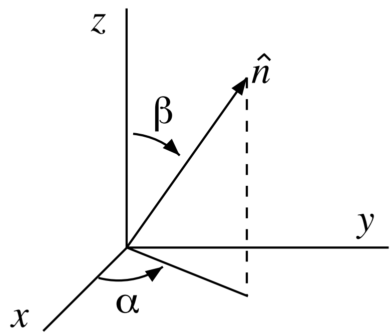
(d) Dadas las matrices da Pauli, podemos definir los operadores $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$. ¿Cuáles son sus autoestados y sus autovalores? ¿Cómo se relacionan con los estados y posibles valores de spin 1/2?

P9 Los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son autoestados de la componente z del espín S_z con autovalor $\pm\hbar/2$. Diga cómo actúan los operadores S_x y S_y sobre estos dos estados. Muestre que en esa base los operadores de espín se relacionan con las matrices de Pauli por: $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$. Verifique que $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k$ y $\{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$.

P10 Construya $|\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}; +\rangle$ tal que

$$\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\ |\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}; +\rangle = \frac{\hbar}{2}\ |\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}; +\rangle$$

donde $\hat{\boldsymbol{n}}$ está caracterizado por los ángulos que se muestran en la figura. Exprese su respuesta como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$. (Nota: la respuesta es $\cos(\beta/2)\,|+\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)\,|-\rangle$. En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, considere al problema como un problema de autovalores.)



P11 Un sistema de espín 1/2 está en un autoestado de $\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\boldsymbol{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

(a) Suponga que se mide S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$?

(b) Evalúe la dispersión de S_x, es decir $\langle (S_x - \langle S_x \rangle)^2 \rangle$. Verifique el resultado para los casos $\gamma = 0, \pi/2, \pi$.

P12 Un haz de átomos de espín 1/2 es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern–Gerlach en la siguiente manera:

(a) La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.

(b) La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ con $\hat{\boldsymbol{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.

(c) Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primer medición esta normalizado a uno? ¿Cómo se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?

P13 El operador impulso angular en dirección z es

$$L_z = \hbar\Big(|R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L| \Big)$$

(a) Encuentre sus autovalores y autovectores, y escriba su representación matricial en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.

(b) Muestre usando la representación espectral que $\hat{R}(\theta) = \exp\left(\frac{-i\theta L_z}{\hbar}\right)$.

(c) Muestre usando la representación en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ que $\hat{R}(\theta) = \mathbb{I}\cos\theta - i\frac{L_z}{\hbar}\sin\theta$.

(d) Muestre que $\hat{L}_z$ es hermítico y $\hat{R}(\theta)$ unitario (use la representación matricial y la descomposición espectral).

III. Representación en la esfera de Bloch

P14 **Esfera de Bloch.** Considere el vector de norma 1 más general posible de un espacio vectorial complejo de dimensión 2.

(a) Muestre que, a menos de una fase global, el estado se puede escribir como

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \qquad \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi],$$

donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ es una base ortonormal.

Considere una esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$.

(b) Muestre que en coordenadas esféricas, los puntos de la esfera se pueden parametrizar como

$$(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \qquad \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi].$$

A partir de los dos ítems anteriores concluya que hay una relación 1 a 1 entre los puntos sobre una esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$ y los vectores complejos de dimensión 2 con norma 1 (definidos a menos de una fase global). A esta representación de los vectores complejos se la denomina representación en la esfera de Bloch.

P15 **Esfera de Bloch para fotones.** Considere el caso de la polarización de fotones y tome como base ortonormal la base de polarización lineal $\{|H\rangle, |V\rangle\}$. Identifique sobre la esfera de Bloch los puntos correspondientes a los estados $|H\rangle, |V\rangle, |D\rangle, |A\rangle, |R\rangle, y\, |L\rangle$. Indique además todos son los puntos correspondientes a estados con polarización lineal.

P16 **Esfera de Bloch para spin 1/2.** Considere el caso de un spin 1/2 y tome como base ortonormal a la base de autoestados de spin en la dirección z, $\{|+;\hat{\boldsymbol{z}}\rangle, |-;\hat{\boldsymbol{z}}\rangle\}$. Identifique sobre la esfera los autoestados de spin en las direcciones $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$. Identifique además en la esfera el autoestdo general de spin en una dirección $\hat{\boldsymbol{n}}$ arbitraria. ¿Cómo puede interpretar los puntos de la esfera de Bloch para el caso de spin 1/2?

IV. Otros problemas

P17 Suponga una matriz de 2×2 X que se escribe en la forma

$$X = a_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}$$

donde a_0 y $a_{1,2,3}$ son números, y $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

(a) ¿Cómo se relacionan los a_k $(k = 0,1,2,3)$ con $\mathrm{tr}(X)$ y $\mathrm{tr}(\sigma_k X)$?

(b) Obtenga a_0 y a_k en término de los elementos de matriz X_{ij}. Muestre que cualquier matriz hermítica de 2×2 X se puede escribir en esta forma.

P18 Considere un operador en dimensión 2 dado por

$$H = H_{11}\,|1\rangle\langle 1| + H_{22}\,|2\rangle\langle 2| + H_{12}\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

donde H_{11}, H_{22}, H_{12} son números reales y $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son dos estados ortogonales. Encuentre los autoestados de H y los correspondientes autovalores. Asegúrese de que su respuesta tenga sentido en el caso $H_{12} = 0$.