Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 2: Formalismo

I. Espacios de dimensión finita

$\boxed{\textbf{P1}}$ Suponga que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ son dos bases ortonormales de un espacio de Hilbert de dimensión 3.

(a) Considere $|u\rangle = \frac{|\alpha\rangle - i|\beta\rangle}{\sqrt{2}}$ y $|v\rangle = \frac{i|\alpha\rangle + |\beta\rangle}{\sqrt{2}}$. ¿Cuánto vale $\langle u|v\rangle$? ¿Son ortogonales?

(b) Los vectores de la base $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ se relacionan con los de la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ de la siguiente forma: $|u\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{ui}\,|i\rangle$, con $u = \alpha, \beta, \gamma$. ¿Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes a_{ui}? ¿Cuánto valen $\langle 2|\beta\rangle$ y $\langle \alpha|3\rangle$?

(c) Escriba $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y calcule nuevamente $\langle u|v\rangle$.

$\boxed{\textbf{P2}}$ Dado un vector $|\alpha\rangle$ de un espacio de Hilbert de dimensión D, definimos el operador $P_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$.

(a) Mostrar que P_α es una *proyección ortogonal*, es decir que satisface: (i) $P_\alpha^2 = P_\alpha$, (ii) $P_\alpha^\dagger = P_\alpha$.

(b) Sea $\{|1\rangle, \ldots, |D\rangle\}$ una base ortonormal. Escribir la representación matricial de P_α en esta base.

(c) Repita el ítem anterior para el caso particular en que $|\alpha\rangle$ coincide con un elemento de la base, por ejemplo $|\alpha\rangle = |1\rangle$.

(d) Sea un estado $|\psi\rangle = c_\alpha\,|\alpha\rangle + c_\beta\,|\beta\rangle$, con $|\beta\rangle$ un vector ortogonal a $|\alpha\rangle$. Calcule la proyección de $|\psi\rangle$ sobre $|\alpha\rangle$: $P_\alpha\,|\psi\rangle$.

$\boxed{\textbf{P3}}$ Considere dos estados $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ de un espacio de Hilbert de dimensión D. Suponga que $\langle a_1|\alpha\rangle, \langle a_2|\alpha\rangle, \ldots,$ $\langle a_D|\alpha\rangle$ y $\langle a_1|\beta\rangle, \langle a_2|\beta\rangle, \ldots,$ $\langle a_D|\beta\rangle$ son todos conocidos, donde $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots, |a_D\rangle\}$ forman una base ortonormal.

(a) Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en esta base.

(b) Especialice la representación matricial del ítem anterior para el caso en que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son dos elementos de la base, i.e. $|\alpha\rangle = |a_n\rangle$, $|\beta\rangle = |a_m\rangle$.

(c) Considere ahora un sistema de espín 1/2 y sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ iguales a $|s_z = +\hbar/2\rangle$ y $|s_x = +\hbar/2\rangle$ respectivamente. Escriba explícitamente la matriz cuadrada que corresponde a $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base usual (S_z diagonal).

$\boxed{\textbf{P4}}$ Sean X, Y, Z tres operadores. Usando el álgebra de bras y kets, verifique las siguientes afirmaciones

(a) $\mathrm{tr}(X+Y) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y)$.

(b) $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$.

(c) La traza de un operador no depende de la base en la que se calcula.

(d) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

$\boxed{\textbf{P5}}$ Sea A un operador Hermítico cuya descomposición espectral, $A = \sum_i a_i\,|i\rangle\langle i|$, es conocida y sea g una función tal que admite un desarrollo en series de potencias. Muestre entonces que $g(A) = \sum_i g(a_i)\,|i\rangle\langle i|$.

$\boxed{\textbf{P6}}$ Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autovectores de algún operador Hermítico A. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autovector de A? Justifique.

$\boxed{\textbf{P7}}$ Sean A y B dos operadores Hermíticos tales que admiten una base completa ortonormal de autovectores simultáneos de A y B, $\{|a_i, b_i\rangle\}$. ¿Se puede siempre concluir que $[A, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela. Si es no, dé un contraejemplo.

P8 Dos operadores Hermíticos anticonmutan, es decir que $\{A, B\} = AB + BA = 0$. ¿Es posible tener un autoestado común de A y B? Pruebe o ilustre su conclusión.

P9 Dos operadores Hermíticos A_1 y A_2, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con un tercer operador Hermítico B, i.e. $[A_1, B] = [A_2, B] = 0$. Muestre entonces que el espectro de B debe estar degenerado. Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales con $B \to H = p^2/2m + V(r)$, $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

P10 Considere un espacio de estados generado por los autovectores $\{|a_i\rangle\}$ de un cierto operador Hermítico A. Asuma que no hay degeneración.

(a) Pruebe que $\prod_i (A - a_i)$ es el operador nulo.

(b) Para un j fijo, ¿cuál es el significado del operador $\prod_{i \neq j} \frac{(A - a_i)}{(a_j - a_i)}$?

(c) Ilustre los dos puntos anteriores para el caso particular de un sistema de spin 1/2 con $A = S_z$.

P11 Considere un espacio de Hilbert de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Para cada uno de los siguientes operadores

(i) $M_1 = 2\,|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + 2i\,|2\rangle\langle 3| - 2i\,|3\rangle\langle 2| + 4\,|3\rangle\langle 3|$,

(ii) $M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$,

(iii) $M_3\,|1\rangle = |1\rangle - 2i\,|3\rangle$, $M_3\,|2\rangle = |2\rangle$, $M_3\,|3\rangle = 2i\,|1\rangle + |3\rangle$;

obtenga

(a) la descomposición del operador como combinación lineal de operadores $\{|i\rangle\langle j|\}_{i,j=1,2,3}$.

(b) la representación matricial del operador en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.

(c) la acción del operador sobre cada elemento de la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.

(d) la descomposición espectral del operador.

(e) determine si el operador es Hermítico.

P12 Considere un espacio de Hilbert de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. En esta base los operadores A y B están representados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

donde a y b son reales.

(a) En esta base en sencillo notar que A tiene un espectro degenerado. ¿También lo tiene B?

(b) Muestre que A y B conmutan.

(c) Encuentre un nuevo conjunto de estados ortonormales que sean autoestados simultáneos de A y B. Especifique los autovalores de A y B para cada uno de los tres autoestados. ¿La especificación de los autovalores caracteriza completamente a cada autoestado?

P13 Sea U un operador unitario, es decir tal que $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$.

(a) Mostrar que los autovalores de U tienen módulo 1.

(b) Mostrar que U siempre se puede escribir como $U = e^{iM}$, donde M es un operador Hermítico.

P14 Construya la matriz de cambio de base que conecta la base donde S_z es diagonal con la base en que S_x es diagonal. Muestre que su resultado es consistente con la relación general

$$U = \sum_r \left|b^{(r)}\right\rangle\!\left\langle a^{(r)}\right| ,$$

donde $\left|a^{(r)}\right\rangle$ y $\left|b^{(r)}\right\rangle$ son los autovectores de la base original y nueva, respectivamente.

P15 Suponga que $f(A)$ es una función de un operador Hermítico A tal que $A\,|a\rangle = a\,|a\rangle$. Evalúe $\langle b'|f(A)|b\rangle$ suponiendo que se conoce la matriz de transformación entre la base $\{|a\rangle\}$ y la base $\{|b\rangle\}$.

P16 Sean A, B, C y D operadores. Pruebe las siguientes identidades

(a) $[A, B] = -[B, A]$
(b) $[A, B] = \{A, B\} - 2BA$
(c) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$
(d) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
(e) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$
(f) $[AB, CD] = A[B, C]D + [A, C]BD + CA[B, D] + C[A, D]B$
(g) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

P17 Sean A y B dos operadores tales que A conmuta con $[A, B]$. Demostrar que

$$[A^m, B] = mA^{m-1}[A, B].$$

Use esta propiedad para demostrar que

$$[f(A), B] = \frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}A}[A, B],$$

donde f es una función que admite un desarrollo en serie de potencias de su argumento.

P18 Dados dos operadores A y B, definimos la familia de operadores $B(s)$, parametrizados por un parámetro real $s \in \mathbb{R}$, de la siguiente forma

$$B(s) \equiv e^{sA}Be^{-sA}\,.$$

Demostrar:

(a) $\frac{\mathrm{d}B(s)}{\mathrm{d}s} = [A, B(s)]$
(b) $\frac{\mathrm{d}^2B(s)}{\mathrm{d}s^2} = [A, [A, B(s)]]$
(c) $\frac{\mathrm{d}^3B(s)}{\mathrm{d}s^3} = [A, [A, [A, B(s)]]]$

Utilice esto para expandir $B(1)$ en una serie de Taylor alrededor de $s = 0$ y demostrar que

$$e^ABe^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \ldots$$

Finalmente, para el caso particular en que $[A, B] = cB$, con $c \in \mathbb{C}$, muestre que el resultado anterior implica que

$$e^ABe^{-A} = e^c\,B\,.$$

P19 Sean A y B dos operadores que conmutan con $[A, B]$. Demostrar que

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

Ayuda:

(a) Mostrar que $\left[e^{\eta A}, B\right] = \eta e^{\eta A}[A, B]$.

(b) Definimos $g(\eta) \equiv e^{\eta A} e^{\eta B} e^{-\eta(A+B)}$. Demostrar que la derivada es: $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\eta} = \eta[A,B]g$.

(c) Integrar la ecuación anterior.

P20 (a) Considere un operador tal que $A^2 = \mathbb{I}$ (dé un ejemplo concreto de un operador de este tipo). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha A) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha))\mathbb{I} + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))A$$

En particular muestre que: $e^{-i\alpha A} = \cos(\alpha)\mathbb{I} - i\sin(\alpha)A$.

(b) Considere un operador B tal que $B^3 = B$ (¿podría dar un ejemplo?). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha B) = f(0)\mathbb{I} + \left(\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0)\right) B^2 + \frac{1}{2}\left(f(\alpha) - f(-\alpha)\right) B$$

En particular muestre que: $e^{-i\alpha B} = \mathbb{I} + (\cos(\alpha) - 1)B^2 - i\sin(\alpha)B$.

II. Espacios de dimensión infinita

P21 (a) Sean A y B dos operadores. Utilizando la linealidad y la ciclicidad de la traza, calcule $\mathrm{tr}\left([A,B]\right)$.

(b) Utilizando la relación de conmutación canónica $[x,p] = i\hbar\mathbb{I}$, calcule $\mathrm{tr}\left([x,p]\right)$. Compare con lo obtenido en el ítem anterior. ¿Son consistentes ambos resultados? ¿Cuál es el problema?

(c) ¿Pueden existir dos operadores A y B sobre un espacio de dimensión finita tales que $[A,B] = i\hbar\mathbb{I}$? ¿Por qué?

P22 (a) Sean x y p_x la coordenada y el momento lineal en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico

$$\{x, F(p_x)\}_{\text{clásico}} .$$

(b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador

$$\left[x, \exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)\right] ,$$

y compare con (a) cuando $F(p_x) = \exp(ip_x a/\hbar)$.

(c) Usando el resultado de (b), pruebe que

$$\exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)|d\rangle\,, \text{ con } x\,|d\rangle = d\,|d\rangle\,, d \in \mathbb{R},$$

es un autoestado del operador x. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

P23 (a) Verifique que las igualdades

$$[x_i, G(\boldsymbol{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad [p_i, F(\boldsymbol{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones F y G que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

(b) Evalúe $\left[x^2, p^2\right]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\left\{x^2, p^2\right\}_{\text{clásico}}$.

P24 El operador de traslación para un desplazamiento espacial finito $\boldsymbol{l}$ está dado por

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{l}) = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}}{\hbar}\right)$$

donde $\boldsymbol{p}$ es el operador impulso lineal.

(a) Evalúe $[x_i, \mathcal{T}(\boldsymbol{l})]$.

(b) Muestre que $\mathcal{T}$ es unitario y que $\mathcal{T}^{-1}(\boldsymbol{l}) = \mathcal{T}(-\boldsymbol{l})$.

(c) Usando lo anterior, encuentre cómo cambia el valor de expectación $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ frente a traslaciones.

P25 Pruebe lo siguiente

$$\langle x'|p|\alpha\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x'|\alpha\rangle$$
$$\langle \beta|p|\alpha\rangle = \int \mathrm{d}x' \psi_\beta^*(x')(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x'}\psi_\alpha(x')$$

donde $\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(x') = \langle x'|\beta\rangle$ son las respectivas funciones de onda. (Ayuda: considere una traslación infinitesimal y calcule $\langle x'|\, \mathcal{T}(\mathrm{d}x)\, |\alpha\rangle$).

Evalúe la expresión anterior para el caso en que $|\alpha\rangle = |x\rangle$, para encontrar el elemento de matriz del operador p en la base de posición, $\langle x'|p|x\rangle$. ¿Cómo se interpreta la función $\delta'(x)$?

P26 (a) ¿Cuál es el significado físico de $\exp(ixp_0/\hbar)$, donde x es el operador posición y p_0 es algún número con dimensiones de momento? Justifique su respuesta.

(b) Pruebe lo siguiente

$$\langle p'|x|\alpha\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p'|\alpha\rangle$$
$$\langle \beta|x|\alpha\rangle = \int \mathrm{d}p' \psi_\beta^*(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\psi_\alpha(p')$$

donde $\psi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ son las funciones de onda en el espacio de momentos.