# Formulación canónica de la Mecánica Clásica

Sean $g(q,p)$ y $f(q,p)$ dos magnitudes físicas definidas en términos de las coordenadas generalizadas $q$ y $p = \partial\mathscr{L}/\partial\dot{q}$. El corchete de Poisson entre ellos se define:

$$\{g\,,f\} = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$$

Algunos corchetes importantes :

$$\{x, p_x\} = 1 \qquad \{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad \{\ell_i, \ell_j\} = \epsilon_{ijk}\,\ell_k$$

Una magnitud arbitraria $g(q,p)$ cambia en $dg$ ante transformaciones infinitesimales:

| traslación $dx$ | rotación $d\theta$ | desplazamiento temporal $dt$ |
|---|---|---|
| $dg = dx\,\{g, p_x\}$ | $dg = d\theta\,\{g, \ell_z\}$ | $dg = dt\,\{g, H\}$ |

# Transformaciones infinitesimales en cuántica

El cambio del valor de expectación $\langle\, G\,\rangle$ de un observable $G$ ante una transformación unitaria infinitesimal $U(\epsilon) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,\epsilon\, T$, con $T$ hermítico, es :

$$\left\{\begin{array}{l} \quad |\psi\rangle \\ \langle\, G\,\rangle = \langle\psi|G|\psi\rangle \end{array}\right. \xrightarrow{\;U(\epsilon) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,\epsilon\, T\;} \left\{\begin{array}{l} |\psi'\rangle = U(\epsilon)\,|\psi\rangle \\ \langle\, G\,\rangle' = \langle\psi'|G|\psi'\rangle \end{array}\right.$$

La variación infinitesimal es $\mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \langle\, G\,\rangle' - \langle\, G\,\rangle$ :

$$\left.\begin{aligned} \langle\, G\,\rangle' &= \langle\psi'|\,G\,|\,\psi'\rangle \\ &= \langle\psi|\,U^\dagger(\epsilon)\,G\,U(\epsilon)|\,\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\,(1+\tfrac{i}{\hbar}\epsilon T)\,G\,(1-\tfrac{i}{\hbar}\epsilon T)\,|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\,(G+\tfrac{i}{\hbar}\epsilon\, TG - \tfrac{i}{\hbar}\epsilon\, GT)\,|\psi\rangle \\ &= \langle\, G\,\rangle + \tfrac{i}{\hbar}\,\epsilon\,\langle\psi|\,[T,G]\,|\psi\rangle \end{aligned}\right\} \qquad \mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\,\frac{1}{i\hbar}\langle\,[G,T]\,\rangle$$

# Transformaciones infinitesimales en clásica y cuántica

En clásica, las tres relaciones

$$dg = dx\,\{g, p_x\} \qquad dg = d\theta\,\{g, l_z\} \qquad dg = dt\,\{g, H\}$$

se pueden resumir en

$$dg = \epsilon\,\{g, t\}$$

➩ $t$ es una magnitud física que genera cierta transformación canónica infinitesimal.

➩ $dg$ nos dice como cambia la magnitud $g$ ante la transformación $t$.

En cuántica:

➩ la magnitud $g$ estará representada por un operador hermítico $G$, a determinar.

➩ la transformación infinitesimal por un operador unitario $U(\epsilon) = 1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon\, T$ ($T$ hermítico).

➩ la variación $\mathrm{d}\langle G \rangle$ está determinada por el cambio en el estado $|\psi'\rangle = (1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon\, T)|\psi\rangle$

$$\mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\, \frac{1}{i\hbar}\langle\, [G, T]\,\rangle$$

# Conmutadores y corchetes de Poisson

Sean $Q$ y $P$ dos operadores que satisfacen $[Q,P] = i\hbar$.

Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones analíticas.

Sean $F$ y $G$ dos operadores como $F = f(Q,P)$ y $G = g(Q,P)$.

Entonces,

$$[F,Q] = -i\hbar\,\frac{\partial F}{\partial P} \qquad [F,P] = i\hbar\,\frac{\partial F}{\partial Q}$$

Y en forma general,

$$[F,G] = i\hbar\left(\frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial G}{\partial P} - \frac{\partial G}{\partial Q}\frac{\partial F}{\partial P}\right) + \mathscr{O}(\hbar^2)$$

Tomando valor de expectación sobre un $|\psi\rangle$ se tiene la *relación matemática* :

$$\boxed{\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{i\hbar}\langle [F,G] \rangle = \langle \{F,G\} \rangle}$$

# Cuantización Canónica

Las ecuaciones para las transformaciones infinitesimales en cuántica y clásica son :

$$\mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\ \tfrac{1}{i\hbar}\langle\, [\, G, T\,]\,\rangle \qquad\qquad \mathrm{d}g = \epsilon\,\big\{g(q,p), t(q,p)\big\}$$

# Cuantización Canónica

Las ecuaciones para las transformaciones infinitesimales en cuántica y clásica son :

$$\mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\ \tfrac{1}{i\hbar}\langle\,[\,G,T\,]\,\rangle \qquad\qquad \mathrm{d}g = \epsilon\,\big\{g(q,p),t(q,p)\big\}$$

Las predicciones cuántica y clásica coinciden para estados $|\psi\rangle$ clásicos si vale:

$$\mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\ \tfrac{1}{i\hbar}\langle\,[\,G,T\,]\,\rangle \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\Big\{\,g\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\ ,\ t\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\,\Big\}$$

# Cuantización Canónica

Las ecuaciones para las transformaciones infinitesimales en cuántica y clásica son :

$$\mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\ \frac{1}{i\hbar}\langle\,[\,G,T\,]\,\rangle \qquad\qquad \mathrm{d}g = \epsilon\ \big\{g(q,p),t(q,p)\big\}$$

Las predicciones cuántica y clásica coinciden para estados $|\psi\rangle$ clásicos si vale:

$$\mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\ \frac{1}{i\hbar}\langle\,[\,G,T\,]\,\rangle \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon \Big\{\, g\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\ ,\ t\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\,\Big\}$$

Si postulamos que el operador que corresponde a una magnitud $g(q,p)$ es $G = g(Q,P)$ con $[Q,P] = i\hbar$, en el límite clásico se verifica :

$$\lim_{\hbar\to 0}\ \frac{1}{i\hbar}\langle\,[\,G,T\,]\,\rangle\ =\ \langle\,\{\,G,T\,\}\,\rangle = \big\{\langle G\rangle,\langle T\rangle\big\} = \big\{\,g\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\ ,\ t\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\,\big\}$$

# Cuantización Canónica

Las ecuaciones para las transformaciones infinitesimales en cuántica y clásica son :

$$\mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\ \tfrac{1}{i\hbar}\langle\,[\,G,T\,]\,\rangle \qquad\qquad \mathrm{d}g = \epsilon\ \{g(q,p),t(q,p)\}$$

Las predicciones cuántica y clásica coinciden para estados $|\psi\rangle$ clásicos si vale:

$$\mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\ \tfrac{1}{i\hbar}\langle\,[\,G,T\,]\,\rangle \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{d}\langle\, G\,\rangle = \epsilon\left\{\, g\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\ ,\ t\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\,\right\}$$

Si postulamos que el operador que corresponde a una magnitud $g(q,p)$ es $G = g(Q,P)$ con $[Q,P] = i\hbar$, en el límite clásico se verifica :

$$\lim_{\hbar\to 0}\ \tfrac{1}{i\hbar}\langle\,[\,G,T\,]\,\rangle\ =\ \langle\,\{\,G,T\,\}\,\rangle = \{\langle G\rangle,\langle T\rangle\} = \{\, g\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\ ,\ t\big(\langle Q\rangle,\langle P\rangle\big)\,\}$$

La regla de cuantización de magnitudes físicas ("cuantización canónica") es entonces:

1. A cada magnitud física clásica $g(q,p)$ le corresponde el observable $G = g(Q,P)$
2. $Q$ y $P$, correspondientes a las variables canónicas $q$ y $p$, satisfacen $[Q,P] = i\hbar$