Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 4: Dinámica

I. Representación de Schrödinger

P1 **Rotación de la polarización en un cristal.** Al atravesar un cristal de ciertos materiales, como por ejemplo de cuarzo, un fotón sufre un cambio en su polarización. Esta variación de polarización se puede representar mediante un Hamiltoniano que actúa sobre el grado de libertad de polarización del fotón y que, si el fotón se propaga en la dirección del eje óptico del cristal, se escribe en la base de polarización lineal $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ como

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -iE_0 \\ iE_0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde E_0 es una constante con unidades de energía (que depende de las propiedades del material y de la frecuencia del fotón).

(a) Encuentre los autoestados y autovalores del Hamiltoniano.

(b) Suponga que el fotón entra al cristal linealmente polarizado en dirección $|H\rangle$. Encuentre el estado del fotón a todo tiempo. Diga qué le ocurre a la polarización del fotón mientras viaja a través del cristal.

(c) Grafique para cada tiempo el vector de Bloch del estado encontrado en el ítem anterior. Interprete.

P2 **Precesión del spin en un campo magnético.** Una partícula de spin 1/2 tiene un momento angular intrínseco $\boldsymbol{S}$. Si la partícula está cargada eléctricamente, asociado a este momento angular la partícula tiene también un momento magnético intrínseco $\boldsymbol{\mu}$, dado por

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \boldsymbol{S}, \quad \gamma = g\frac{q}{2m},$$

con m y q la masa y carga de la partícula, respectivamente, y g es una constante adimensional, denominada *factor-g*, que depende de la partícula. Para el caso de un electrón, $q = -|e|$ y $g \approx 2$.

En presencia de un campo magnético externo, se tiene una energía de interacción entre el campo y el momento magnético de la partícula

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = -\gamma \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Si el campo magnético externo es uniforme y en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ (con B constante), entonces

$$H = -\gamma B S_z = -\left(\frac{gqB}{2m}\right) S_z = \left(\frac{|e|B}{m}\right) S_z,$$

donde en la última igualdad usamos los valores de q y de g para el electrón. Finalmente, notando que $\omega = |e|B/m$ tiene unidades de frecuencia, podemos reescribir el Hamiltoniano de la interacción magnética con el spin del electrón como

$$H = \left(\frac{|e|B}{m}\right) S_z = \omega S_z.$$

(a) Verifique que los autoestados de S_z, $|+, \hat{\boldsymbol{z}}\rangle$ y $|-, \hat{\boldsymbol{z}}\rangle$, son también autoestados del Hamiltoniano y calcule los correspondientes autovalores.

(b) Suponga que inicialmente, a $t = 0$, el sistema se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle = |+, \hat{\boldsymbol{x}}\rangle$. Calcule el estado $|\psi(t)\rangle$ en un instante t posterior.

(c) Calcule la probabilidad en función del tiempo de medir S_x y obtener los resultados $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$. Grafique las probabilidades en función del tiempo. ¿Qué tiempo T hay que esperar para que las probabilidades de obtener los resultados $\pm\hbar/2$ al medir S_x sean las mismas que las iniciales a tiempo $t = 0$?

(d) Calcule los valores de expectación $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ y $\langle S_z\rangle$ en función del tiempo y grafique. ¿Qué tiempo T hay que esperar para que los valores medios de S_x y S_y tomen el mismo valor que el inicial a $t = 0$?

(e) Grafique el vector de Bloch del estado $|\psi(t)\rangle$ a cada tiempo t (equivalentemente, encuentre en función de t el versor $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ tal que $|\psi(t)\rangle$ es autoestado del operador $\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ con autovalor $+\hbar/2$ y grafique el versor $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$).

(f) ¿Cómo puede interpretar la evolución temporal del spin generada por el Hamiltoniano de interacción magnética?

P3 **Oscilaciones de neutrinos.** Los *neutrinos* son partículas fundamentales de la familia de los *leptones*. Existen distintas familias de neutrinos (*sabores*): electrónicos (ν_e), muónicos (ν_μ) y tauónicos (ν_τ). En lo que sigue, por simplicidad se consideran solamente dos sabores de neutrinos, ν_e y ν_μ. Se llaman "estados de masa", $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$, a los autoestados del Hamiltoniano libre (relativista) de los neutrinos, es decir los estados tales que

$$H\,|\nu_i(\boldsymbol{p})\rangle = E(\boldsymbol{p})\,|\nu_i(\boldsymbol{p})\rangle\,, \quad E_i^2(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^2 + m_i^2,$$

en unidades tales que $c = 1$. En las interacciones débiles (fuerza nuclear débil) los neutrinos se producen con un *sabor* bien definido, $|\nu_e\rangle$ o $|\nu_\mu\rangle$. Estos autoestados de *sabor* ($\{|\nu_e\rangle\,, |\nu_\mu\rangle\}$) se pueden escribir en función de los autoestados de *masa* ($\{|\nu_1(\boldsymbol{p})\rangle\,, |\nu_2(\boldsymbol{p})\rangle\}$) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\theta\,|\nu_1(\boldsymbol{p})\rangle + \sin\theta\,|\nu_2(\boldsymbol{p})\rangle\,, \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin\theta\,|\nu_1(\boldsymbol{p})\rangle + \cos\theta\,|\nu_2(\boldsymbol{p})\rangle\,, \end{aligned}$$

donde θ es el "ángulo de mezclado".

(a) Considerando que la evolución temporal está generada por el Hamiltoniano libre H, calcular la probabilidad de medir un neutrino muónico a tiempo $t > 0$ si a tiempo $t = 0$ se tenía un neutrino electrónico. A este proceso se lo conoce como "oscilaciones de sabor de neutrinos".

(b) Dado que los neutrinos pueden considerarse partículas ultrarelativistas ($p \gg m$), se puede aproximar la diferencia de energías entre los autoestados de masa como

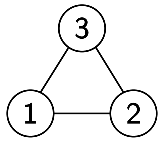
$$E_i(\boldsymbol{p}) - E_j(\boldsymbol{p}) \approx \frac{m_i^2 - m_j^2}{2p}.$$

Reescriba la probabilidad hallada en el ítem anterior en función de la diferencia de masas $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. Muestre que si la diferencia de masas es nula, entonces el fenómeno de oscilaciones no ocurre. (Originalmente se creía que los neutrinos no tenían masa; fue justamente la observación de estas oscilaciones que permitió concluir que en cambio las partículas sí eran masivas).

P4 **Molécula triatómica.** Considere una molécula cíclica triatómica como se muestra en la figura. Suponga que $|\psi_n\rangle$ con $n = 1, 2, 3$ representa el estado de un electrón localizado en el átomo n-ésimo. Los $|\psi_n\rangle$ son vectores ortonormales y en lo que sigue consideraremos el espacio de Hilbert generado por ellos. Si despreciamos la posibilidad de que el electrón salte de un átomo a otro, el Hamiltoniano H_0 es tal que $|\psi_n\rangle$ es autovector con autovalor E_0 independiente de n. Definimos el operador de *traslación cíclica* R según

$$R\,|\psi_n\rangle = |\psi_{n+1}\rangle\,,$$

donde utilizamos los índices cíclicamente (es decir, $3 + 1 \equiv 1$).



(a) Muestre que los autovalores de R son las raíces cúbicas de la unidad y halle los autovectores asociados. ¿Puede asegurar que estos autovectores de R lo son también de H_0?

(b) Suponga ahora que se agrega al Hamiltoniano H_0 un término suplementario W que hace que el electrón pueda saltar de un átomo a otro, dado por

$$W\left|\psi_n\right\rangle = -V_0\left(\left|\psi_{n-1}\right\rangle + \left|\psi_{n+1}\right\rangle\right),$$

donde $V_0 > 0$ en una constante con unidades de energía y se ha usado la notación cíclica. Muestre que el operador R conmuta con el Hamiltoniano total $H = H_0 + W$. Determine los autoestados de H. ¿Está localizado el estado fundamental?

(c) Suponga que inicialmente a $t = 0$ el electrón está localizado en el átomo 1. Halle la probabilidad de que el electrón esté localizado en el átomo n-ésimo a un tiempo $t > 0$ posterior.

P5 Considere un sistema de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. El Hamiltoniano del sistema en esta base se escribe como

$$H = E_0\,|1\rangle\langle 1| + F\,|1\rangle\langle 3| + E_1\,|2\rangle\langle 2| + F\,|3\rangle\langle 1| + E_0\,|3\rangle\langle 3|,$$

donde E_0, E_1 y F son constantes reales con unidades de energía.

(a) Calcule el espectro de energías y los autoestados correspondientes del Hamiltoniano H.

(b) Si a tiempo $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle = |2\rangle$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|2\rangle$ a un tiempo $t > 0$ posterior?

(c) Si a tiempo $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle = |3\rangle$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|3\rangle$ a un tiempo $t > 0$ posterior?

P6 Considere un sistema físico con un espacio de estados de tres dimensiones, del cual una base ortonormal es $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. En dicha base el Hamiltoniano H y los operadores A y B están dados por

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{pmatrix}, \quad A = a\,|u_1\rangle\langle u_1| + a\,|u_2\rangle\langle u_3| + a\,|u_3\rangle\langle u_2|, \quad \begin{cases} B\,|u_1\rangle = b\,|u_2\rangle \\ B\,|u_2\rangle = b\,|u_1\rangle \\ B\,|u_3\rangle = b\,|u_3\rangle \end{cases},$$

donde ω_0, a y b son constantes positivas. Inicialmente, a $t = 0$, el estado del sistema es

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_1\rangle + \frac{1}{2}\,|u_2\rangle + \frac{1}{2}\,|u_3\rangle.$$

(a) Si a $t = 0$ se mide la energía del sistema. ¿Qué valores pueden encontrarse y con qué probabilidad? Calcule $\langle H\rangle$ y $\langle \Delta H\rangle$ para el estado $|\psi(0)\rangle$.

(b) Si a $t = 0$ en lugar de medir H se mide A, ¿qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidad? ¿Cuál es estado del sistema inmediatamente después de la medición? Repita el cálculo si en lugar de A se mide B.

(c) Si a $t = 0$ no se midió nada, calcule el estado del sistema a todo tiempo posterior, $|\psi(t)\rangle$. Repita el cálculo si se midió: (i) H, (ii) A, o (iii) B. Discuta, en cada caso, qué resultados se obtendrían si se midiese A en el instante t. Ídem para: (i) H, y (ii) B.

P7 Sean $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$ autoestados del Hamiltoniano H con autovalores E_1 y E_2 respectivamente. A $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi_1\rangle = a_1\,|\varphi_1\rangle + a_2\,|\varphi_2\rangle$. Muestre que el valor medio de un operador B arbitrario varía armónicamente en el tiempo con frecuencia $\nu = |E_2 - E_1|/h$. Note que el período τ de esta oscilación satisface $|E_2 - E_1|\tau = h$.

P8 Una caja que contiene una partícula se divide en dos compartimientos (izquierdo y derecho) a través de un separador fino. Si se sabe que la partícula está del lado derecho (izquierdo) con certeza, representaremos el estado de posición la partícula con el vector $|R\rangle$ ($|L\rangle$), donde despreciamos variaciones espaciales dentro de cada mitad de la caja. De esta forma, el sistema es un sistema efectivo de dimensión 2. Considerando a $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ como base ortonormal, el estado más general del sistema puede ser escrito como

$$|\psi\rangle = |R\rangle \langle R|\psi\rangle + |L\rangle \langle L|\psi\rangle$$

La partícula puede *tunelear* a través del separador; este efecto túnel es caracterizado por el Hamiltoniano

$$H = \Delta \left(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L| \right)$$

donde Δ es un número real con dimensiones de energía.

(a) Encuentre los autoestados de energía. ¿Cuáles son los autovalores de energía correspondientes?

(b) Suponga que inicialmente a $t = 0$ el estado del sistema está dado por el $|\psi\rangle$ general dado anteriormente. Encuentre el estado $|\psi(t)\rangle$ para un tiempo $t > 0$ posterior aplicando a $|\psi\rangle$ el operador de evolución temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi(0)\rangle$.

(c) Suponga que a $t = 0$ la partícula está del lado derecho con certeza. ¿Cuál es la probabilidad de observar a la partícula en el lado izquierdo en función del tiempo?

(d) Escriba explícitamente la ecuación de Schrödinger para el estado $|\psi(t)\rangle$ en la base $\{|R\rangle, |L\rangle\}$. Resuelva las ecuaciones acopladas de los coeficientes $\langle R|\psi(t)\rangle$, $\langle L|\psi(t)\rangle$ y verifique que obtiene el mismo resultado del punto (b), como debe ser.

(e) Suponga que por error se escribió H como

$$H = \Delta\, |L\rangle\langle R|\,.$$

Resolviendo el problema de evolución temporal más general con este operador, muestre que se viola la conservación de la probabilidad. ¿Qué propiedad matemática de todo operador Hamiltoniano válido no satisface este H?

P9 **"Conservación de la energía".** Considere un sistema de dimensión D con un Hamiltoniano independiente del tiempo

$$H = \sum_{i=1}^{D} E_i\, |E_i\rangle\langle E_i|$$

(por simplicidad puede asumir que el Hamiltoniano no está degenerado).

Considere un estado inicial arbitrario

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{i=1}^{D} c_i\, |E_i\rangle$$

y sea $|\psi(t)\rangle$ el estado a un tiempo t posterior.

(a) Muestre que la probabilidad de medir la energía E_i sobre el estado $|\psi(t)\rangle$ es independiente del tiempo.

(b) Concluya entonces que el valor medio de energía tampoco varía en el tiempo.

¿Dependen estos resultados de la representación elegida?

P10 **Efecto Zeno Cuántico.**[1,2,3] El "efecto Zeno cuántico" (también conocido como "paradoja de Turing") es una característica de los sistemas cuánticos que dice que si se "observa" (en el sentido de medir) un sistema continuamente, entonces éste nunca evolucionará temporalmente. Para mostrar el efecto, considere un sistema que inicialmente a $t = 0$ se encuentra en un autoestado $|a\rangle$ con autovalor a de un dado observable A. El sistema además evoluciona temporalmente de acuerdo a un Hamiltoniano H.

(a) Suponga que a un tiempo $t > 0$ se mide el observable A sobre el sistema. Muestre que para tiempos suficientemente pequeños ($t \ll 1$), la probabilidad de permanecer en el estado $|a\rangle$ está dada por

$$\text{Prob}(|a\rangle) \approx 1 - \frac{\text{Var}(E) t^2}{\hbar^2},$$

done $\text{Var}(E)$ es la varianza de energía en el estado inicial $|a\rangle$.

(b) Considere ahora que se mide el observable A N veces entre $t = 0$ y $t = T$, en intervalos equiespaciados $\Delta t = T/N$. Muestre que en el límite en que se observa el sistema continuamente ($N \to \infty$), la probabilidad de que el sistema permanezca en el estado $|a\rangle$ a tiempo $t = T$ tiende a uno.

[1] Versión original en correspondencia privada de A. Turing.
[2] Review similar al ejercicio: B. Misra, E. C. G. Sudarshan, Journal of Mathematical Physics, 18, 756, (1977).
[3] Realización experimental: W. M. Itano, J. J. Bollinger, D. J. Wineland, Phys. Rev. A, 41, 2295 (1990).

P11 **Quantum Speed Limit [Margolus, Levitin][1].** Considere un sistema con Hamiltoniano $H = \sum_i E_i |E_i\rangle\langle E_i|$ y cuyo estado inicial es $|\psi_0\rangle = \sum_i c_i |E_i\rangle$. Sea $|\psi(t)\rangle$ el estado del sistema a un tiempo t posterior.

(a) Sea τ un tiempo tal que el estado evolucionado $|\psi(\tau)\rangle$ es ortogonal al estado inicial $|\psi_0\rangle$. Escriba explícitamente qué relaciones deben satisfacer τ, c_i y E_i para que valga la condición de ortogonalidad.

(b) Usando que $\cos x \geq 1 - \frac{2}{\pi}(x + \sin x)$ para todo $x \geq 0$, muestre que las condiciones del punto anterior implican que

$$\tau \geq \frac{\pi\hbar}{2\langle E\rangle},$$

donde $\langle E\rangle$ es el valor medio de la energía para el estado inicial $|\psi_0\rangle$. Interprete.

(c) En vista del resultado anterior, discuta la siguiente afirmación: *la mecánica cuántica impone un límite fundamental sobre cualquier sistema físico que se utilice como computadora, no pudiendo éste nunca realizar más de $\sim 10^{33}$ operaciones por segundo por Joule de energía* [2].

[1] N. Margolus, L. B. Levitin, Physica D, 120, 188-195 (1998).
[2] S. Lloyd, Nature, 406, 1047–1054 (2000).

II. Representación de Heisenberg

P12 Considere nuevamente el problema de la precesión del spin. Utilizando el Hamiltoniano del problema **P2**, escriba las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para los operadores dependientes del tiempo $S_x(t)$, $S_y(t)$ y $S_z(t)$. Resuélvalas para obtener $S_x(t)$, $S_y(t)$ y $S_z(t)$ como funciones del tiempo y calcule los valores medios de estos operadores para un estado general cualquiera. En particular, compare el valor medio $\langle S_x(t)\rangle$ para el estado $|+, \hat{\boldsymbol{x}}\rangle$ con el antes obtenido en el ejercicio **P2**.

P13 Sean A, B y C tres operadores tales que $[A, B] = C$. Suponga además que el sistema evoluciona según un dado Hamiltoniano H. Muestre entonces que

$$[A(t), B(t)] = C(t),$$

donde $A(t)$ es el operador A evolucionado un tiempo t en la representación de Heisenberg (y análogamente para $B(t)$ y $C(t)$).

P14 Sea $x(t)$ el operador posición para una partícula libre en una dimensión ($H = p^2/2m$) en la representación de Heisenberg. Calcule el conmutador entre el operador de posición a dos tiempos distintos,

$$[x(t), x(0)].$$

¿Conmuta el operador posición a distintos tiempos?

P15 **“Simetrías y Conservación”.** Sea $A = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$ un observable que conmuta con el Hamiltoniano. Muestre entonces que la probabilidad de medir los distintos resultados a_i es independiente del tiempo. Concluya entonces que, además, el valor medio de A también es constante en el tiempo. ¿Dependen estos resultados de la representación elegida?

P16 Elija cualquier problema de la sección I y repita los cálculos de probabilidades y/o valores medios en función del tiempo, pero ahora usando la representación de Heisenberg. Verifique que obtiene los mismos resultados, como debe ser.

III. Teorema de Ehrenfest

P17 (a) Demostrar que el valor de expectación de un observable A satisface

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$$

¿Depende este resultado de la representación elegida para realizar el cálculo?

(b) Utilice el resultado anterior para deducir que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}\right\rangle, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle = -\left\langle \frac{\partial H}{\partial x}\right\rangle$$

(c) Para el caso en que el Hamiltoniano es de la forma $H = p^2/(2m) + V(x)$, muestre que de las expresiones del ítem anterior se deduce el teorema de Ehrenfest

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle = \langle p\rangle\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle = -\left\langle \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right\rangle$$

P18 Considere una partícula libre unidimensional y suponga que a t_0 la función de onda del sistema satisface la relación de incerteza mínima

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \qquad (\text{a } t = t_0).$$

(a) Muestre, aplicando el teorema de Ehrenfest, que $\langle x\rangle$ es una función lineal del tiempo, mientras que $\langle p\rangle$ permanece constante.

(b) Escriba e integre las ecuaciones de movimiento para $\left\langle x^2\right\rangle$ y $\langle\{x,p\}\rangle$.

(c) Muestre que, tomando $t_0 = 0$, se satisface la relación

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle = \frac{\left\langle(\Delta p)_0^2\right\rangle}{m^2}t^2 + \left\langle(\Delta x)_0^2\right\rangle,$$

donde $\left\langle(\Delta x)_0^2\right\rangle$ y $\left\langle(\Delta p)_0^2\right\rangle$ son las dispersiones en el instante $t_0 = 0$. (Ayuda: tenga presente el ejercicio 9 de la Guía 3 sobre la relación de incerteza generalizada). ¿Cómo varía el ancho del paquete en función del tiempo? Interprete el resultado.

P19 Considere una partícula en un potencial unidimensional $V(x) = -kx$ (por ejemplo, puede corresponder a un campo gravitatorio o a un campo eléctrico uniforme).

(a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición x y el momento p de la partícula. Integre las ecuaciones y compare con el resultado clásico.

(b) Muestre que la dispersión $\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle$ no varía en el tiempo.

P20 Considere una partícula en tres dimensiones cuyo Hamiltoniano está dado por $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x})$.

(a) Calculando $[\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}, H]$ obtenga

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}\rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{p}^2}{m}\right\rangle - \langle \boldsymbol{x}\cdot\nabla V\rangle\,.$$

Para identificar la relación anterior con el análogo en mecánica cuántica del teorema del virial, resulta esencial que el miembro izquierdo sea nulo. ¿Bajo qué condición ocurre esto?

(b) Para este caso en particular, considere un potencial homogéneo de grado α, es decir $V(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^\alpha V(\boldsymbol{x})$. Analice los casos particulares $\alpha = -1$ (potencial de Coulomb) y $\alpha = 2$ (oscilador armónico).

(c) ¿Es el operador $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}$ hermítico? Repita el cálculo realizado en (a) para $[\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}, H]$. ¿Puede construir un análogo cuántico del producto clásico $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}$ que sea hermítico?

IV. Otros problemas

P21 Sea U un operador unitario arbitrario. Muestre que siempre existe algún Hamiltoniano H tal que $U = e^{-iHt}$ para algún tiempo t. (Nota: puede ser útil utilizar resultados ya demostrados en la guía 2).

P22 **Densidad y Corriente de probabilidad.** Dada una partícula de masa m sin spin cuya función de onda es $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, definimos la *densidad de probabilidad*, $\rho(\boldsymbol{r}, t)$, y la *corriente de probabilidad*, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, como

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = |\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 \qquad \text{(densidad de probabilidad)},$$
$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left[\psi^*(\boldsymbol{r}, t)\nabla\psi(\boldsymbol{r}, t)\right] \qquad \text{(corriente de probabilidad)},$$

donde Im denota la parte imaginaria.

(a) Muestre que el estado de la partícula está completamente especificado por la densidad de probabilidad, $\rho(\boldsymbol{r})$, y la corriente de probabilidad, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$.
Para ello, en primer lugar muestre que la función de onda $\psi(\boldsymbol{r})$ siempre se puede escribir en función de la densidad de probabilidad $\rho(\boldsymbol{r})$ y de una función real $\xi(\boldsymbol{r}) \in \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r})}e^{i\xi(\boldsymbol{r})},$$

donde ρ juega el rol de módulo de ψ y ξ su fase.
Luego, muestre que la corriente de probabilidad, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, también se puede expresar en términos de la densidad $\rho(\boldsymbol{r})$ y de la fase $\xi(\boldsymbol{r})$, de la siguiente forma

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{m}\rho(\boldsymbol{r})\nabla\xi(\boldsymbol{r}).$$

Finalmente, deduzca que dos funciones de onda con la misma densidad $\rho(\boldsymbol{r})$ y corriente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ sólo pueden diferir en una fase global, $e^{i\phi}$, constante (independiente de $\boldsymbol{r}$).

(b) Muestre que la corriente de probabilidad $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ y la densidad $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ satisfacen la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = 0,$$

para toda solución de la ecuación de Schrödinger. Interprete.

(c) Sea $\boldsymbol{p}$ el operador momento. Muestre entonces que

$$m \int \mathrm{d}^3 r\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{p} \rangle .$$

(d) Sea $\boldsymbol{L}$ el operador dado por $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Muestre entonces que

$$m \int \mathrm{d}^3 r\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{L} \rangle .$$