Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 5: Oscilador Armónico

I. Oscilador Armónico

P1 **Solución algebraica del Oscilador Armónico.** Considere un oscilador armónico en una dimensión, cuyo Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2,$$

donde x y p son los operadores posición y momento, respectivamente. Se definen los operadores a y $a^\dagger$, llamados operadores de *aniquilación* y *creación*, respectivamente, como la siguiente combinación lineal de x y p

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right).$$

Se define además el operador de *número* N como

$$N = a^\dagger a.$$

(a) ¿Cuáles de los operadores a, $a^\dagger$ y N es hermítico? ¿Qué consecuencia tiene esto sobre los autovalores y autoestados de los operadores?

(b) Demuestre que los operadores a y $a^\dagger$ satisfacen la relación de conmutación $\left[a, a^\dagger\right] = \mathbb{I}$.

(c) Demuestre que $[N, a] = -a$. Utilizando esto pruebe que si $|n\rangle$ es un autoestado de N con autovalor $n \in \mathbb{R}$, entonces $a\,|n\rangle$ es un autovector de N con autovalor $n - 1$.

(d) Demuestre que $\left[N, a^\dagger\right] = a^\dagger$. Utilizando esto pruebe que si $|n\rangle$ es un autoestado de N con autovalor $n \in \mathbb{R}$, entonces $a^\dagger\,|n\rangle$ es un autovector de N con autovalor $n + 1$.

(e) Observe que los autovalores n de N tienen que ser todos positivos o cero (ayuda: calcule por ejemplo la norma de $a\,|n\rangle$). De este resultado junto a los dos ítems anteriores concluya que entonces los autovalores de N son los números naturales o cero, es decir $n \in \mathbb{N}_0$.

(f) Para determinar la acción de a y $a^\dagger$ sobre los estados $\{|n\rangle\}$, partiendo de los ítems (c) y (d) escriba $a\,|n\rangle = C_n\,|n-1\rangle$ y $a^\dagger\,|n\rangle = D_n\,|n+1\rangle$. Obtenga el valor de los coeficientes C_n y D_n calculando la norma de estos vectores y verifique que se obtiene

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \qquad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,.$$

(g) Demuestre que el autoestado $|n\rangle$ se puede obtener a partir del $|0\rangle$ como

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^\dagger\right)^n |0\rangle\,.$$

(h) Observe que reemplazando las definiciones de a y $a^\dagger$ en el Hamiltoniano se tiene que

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)$$

Concluya entonces que los estados $|n\rangle$ también son autoestados del Hamiltoniano del oscilador armónico y los autovalores de energía correspondientes son

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

(i) Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento en la representación de Heisenberg para los operadores $x(t)$, $p(t)$, $a(t)$ y $a^\dagger(t)$. ¿Cómo puede interpretar esta evolución?

P2 **Valores de expectación y varianzas en los autoestados de energía**. Utilizando las definiciones del problema **P1**,

(a) Calcule $\langle m|a|n\rangle$, $\langle m|a^\dagger|n\rangle$, $\langle m|a^2|n\rangle$, $\langle m|\left(a^\dagger\right)^2|n\rangle$.

(b) Calcule $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|n\rangle$, $\langle m|x^2|n\rangle$ y $\langle m|p^2|n\rangle$. (Sugerencia: expanda x y p en términos de a y $a^\dagger$).

(c) Evalúe los resultados del ítem anterior para el caso $m = n$, obteniendo los valores medios $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p^2\rangle$ para los autoestados de energía.

(d) Utilizando los resultados anteriores, calcule la varianza de los operadores x y p en los autoestados del oscilador armónico y verifique que se satisface la relación

$$\mathrm{Var}(x)\,\mathrm{Var}(p) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2,$$

donde $\mathrm{Var}(\cdot)$ es la varianza del respectivo operador en el estado $|n\rangle$. ¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

(e) Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

P3 **Solución recursiva de las funciones de onda del oscilador armónico.**

(a) Usando que $a\,|0\rangle = 0$, obtenga una ecuación diferencial para la función de onda del estado fundamental del oscilador armónico, $\langle x|0\rangle$. Resuelva la ecuación. ¿Qué forma tiene la función de onda del estado fundamental?

(b) Usando que $a^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle$, escriba una ecuación para la función de onda del primer estado excitado. Resuelva la ecuación para obtener $\langle x|1\rangle$. (Observación: note que no es necesario resolver una ecuación diferencial).

(c) Note que usando el mismo procedimiento del ítem anterior, se puede obtener de forma recursiva la función de onda $\langle x|n\rangle$ en función de las funciones de onda anteriores, sin necesidad de resolver ninguna ecuación diferencial.

P4 Para un oscilador armónico en una dimensión, sin trabajar con las funciones de onda,

(a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ que maximice $\langle x\rangle$.

(b) Considere que el oscilador se encuentra a $t = 0$ en el estado hallado en el punto (a). ¿Cuál es el estado para $t > 0$ en la representación de Schrödinger?

(c) Evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ como función del tiempo para $t > 0$ usando: (i) la representación de Schrödinger, y (ii) la representación de Heisenberg.

(d) Evalúe la varianza de x como función del tiempo en ambas representaciones.

P5 Considere la función de correlación a dos tiempos de la posición,

$$C(t) = \langle x(t)\,x(0)\rangle - \langle x(t)\rangle\,\langle x(0)\rangle\,,$$

donde $x(t)$ es el operador de posición en la representación de Heisenberg. Evalúe explícitamente la función de correlación para el estado fundamental de un oscilador armónico en una dimensión.

P6 **Estados coherentes.** Se definen los estados *coherentes* de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,,$$

donde α es en general un número complejo (note que a no es hermítico).

(a) Calcule $\langle\alpha|a|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|a^\dagger|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|a^2|\alpha\rangle$, y $\langle\alpha|\left(a^\dagger\right)^2|\alpha\rangle$.

(b) Calcule el valor medio del operador de número (N) y su varianza para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

(c) Calcule el valor medio de la energía (H) y su varianza para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

(d) Calcule el valor medio del operador posición (x) y su varianza para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

(e) Calcule el valor medio del operador momento (p) y su varianza para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

(f) A partir de los resultado anteriores demuestre que todo estado coherente satisface la relación de mínima incerteza. ¿Qué dice esto sobre la función de onda de un estado coherente? Escriba explícitamente la función de onda $\langle x|\alpha\rangle$.

(g) Usando la representación de Heisenberg calcule los valores medios de posición y momento en función del tiempo, $\langle x\rangle(t)$ y $\langle p\rangle(t)$, para un estado coherente $|\alpha\rangle$. ¿Cómo puede interpretar estos resultados? (puede por ejemplo mirar los casos particulares en que α es real o imaginario puro).

(h) Muestre que la descomposición de un estado coherente $|\alpha\rangle$ en la base $\{|n\rangle\}$ es

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \, .$$

(Sugerencia: le puede resultar útil recordar que $|n\rangle = (a^\dagger)^n/\sqrt{n!}\,|0\rangle$ y luego pida que $|\alpha\rangle$ esté normalizado).

(i) Muestre que el producto interno $\langle\beta|\alpha\rangle$ entre dos estados coherentes, $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$, es

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha\beta^*\right)\right].$$

¿Son los estados coherentes ortogonales? ¿Por qué?

(j) Muestre que los estados coherentes forman una base, es decir que satisfacen la relación de completitud

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha\, |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{I}, \quad \text{donde } \mathrm{d}^2\alpha = \mathrm{d}(\mathrm{Re}\,\alpha)\,\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,\alpha)\, .$$

(Sugerencia: use la expansión de los estados coherentes en la base de autoestados del operador número y luego escriba al integral en coordenadas polares usando que $\alpha = |\alpha|e^{i\phi} = re^{i\phi}$. Finalmente use que $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, e^{i(n-m)\phi} = 2\pi\delta_{nm}$ y $\int \mathrm{d}t\, e^{-t}t^n = n!$, con $n, m \in \mathbb{N}_0$).

(k) Muestre que la evolución temporal de un estado coherente $|\alpha\rangle$ en la representación de Schrödinger es es un nuevo estado coherente $|\alpha(t)\rangle$. Encuentre la expresión de $\alpha(t)$ y dibuje en el plano complejo la evolución de $\alpha(t)$. ¿Cómo varían en función del tiempo $\langle H\rangle$, $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$? (compare el resultado con el obtenido en el ítem (g)).

(l) Si se mide la energía de un oscilador armónico en un estado coherente $|\alpha\rangle$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad? ¿Qué distribución de probabilidades se obtiene para los autovalores del operador número?

(m) Calcule las desviaciones estándar (Sdv) relativas de N y H, es decir

$$\frac{\mathrm{Sdv}(N)}{\langle N\rangle} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(N)}}{\langle N\rangle}, \qquad \frac{\mathrm{Sdv}(H)}{\langle H\rangle} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(H)}}{\langle H\rangle}.$$

¿Qué sucede para $|\alpha| \gg 1$?

(n) Calcule $\langle H\rangle$, $\langle p\rangle$ y $\langle x\rangle$ y muestre que satisfacen la misma relación que las variables clásicas (es decir, $E = p^2/2m + m\omega^2x^2/2$) para $E \gg \hbar\omega$. ¿Qué condición impone esto para los valores de α?

P7 **Operador desplazamiento en el espacio de fases.** Se define el *operador de desplazamiento en el espacio de fases* como

$$D(\alpha) = \exp\big(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\big),$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Muestre que $D(\alpha)$ es unitario y además $D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$.

(b) Muestre que

$$D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{-i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)}.$$

(c) Muestre que

$$D^\dagger(\alpha)\, a\, D(\alpha) = a + \alpha, \qquad D^\dagger(\alpha)\, a^\dagger\, D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*,$$

$$D^\dagger(\alpha)\, x\, D(\alpha) = x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,2\,\mathrm{Re}\,\alpha, \qquad D^\dagger(\alpha)\, p\, D(\alpha) = p + \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,2\,\mathrm{Im}\,\alpha.$$

(d) Muestre que el estado $|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$ es autoestado del operador de aniquilación a. ¿Cuál es el autovalor correspondiente? ¿Qué tipo de estado es $|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$?

(e) Muestre que la acción de $D(\alpha)$ sobre el autoestado $|0\rangle$ de energía satisface

$$D(\alpha)\,|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha a^\dagger}\,|0\rangle\,.$$

Luego, expanda $e^{\alpha a^\dagger}$ en serie de potencias y encuentre la expansión del estado $|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$ en la base de autoestados de energía, $\{|n\rangle\}$. Compare con lo obtenido en el ejercicio **P6**.

(f) Evalúe $D(\alpha)$ para los casos particulares en que (i) α es real, y (ii) α es imaginario puro. ¿Qué operadores se obtienen en tales casos?

P8 Considere una partícula sujeta a un potencial de oscilador armónico en una dimensión. Suponga que a $t = 0$ el estado viene dado por

$$|\varphi\rangle = \exp\left(\frac{-ipd}{\hbar}\right)|0\rangle\,,$$

donde p es el operador de momento y d es un número con dimensiones de longitud.

(a) Usando la representación de Heisenberg, evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ para $t > 0$. Interprete el resultado. ¿Qué tipo de evolución temporal sigue $\langle x\rangle$?

(b) Muestre que $|\varphi\rangle$ es autoestado del operador de aniquilación a y calcule su autovalor. ¿Qué tipo de estado describe $|\varphi\rangle$?

(c) Calcule le probabilidad de encontrar a $t = 0$ el estado inicial $|\phi\rangle$ en el estado fundamental $|0\rangle$. ¿Cambia esta probabilidad para $t > 0$?

II. Otros Potenciales

P9 **Oscilador armónico forzado.** Considere el problema de un oscilador armónico unidimensional forzado, cuyo Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx,$$

donde x y p son los operadores posición y momento, respectivamente, y F es una constante real con unidades de fuerza (que puede corresponder, por ejemplo, a un campo gravitatorio o a un campo electrostático uniforme).

(a) Escriba el Hamiltoniano H en función de los operadores de creación ($a^\dagger$) y aniquilación (a) del oscilador armónico ordinario de frecuencia ω: $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$.

(b) Sea $N = a^\dagger a$ el operador de número del oscilador armónico ordinario y $\{|n\rangle\}$ su base de autoestados. ¿Coincide la base de autoestados del operador N con la del Hamiltoniano forzado?

(c) Dado un autoestado $|n\rangle$ de N, definimos el estado trasladado una distancia ℓ, $|n,\ell\rangle$ como

$$|n,\ell\rangle = e^{-ip\ell/\hbar}\,|n\rangle\,.$$

Encuentre el valor de ℓ tal que $|n,\ell\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano forzado. Interprete el resultado. ¿Cuál es la energía correspondiente?

(d) Recuerde que un estado coherente del oscilador armónico ordinario, $|\alpha\rangle$, se puede escribir como $|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$, donde $D(\alpha) = \exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\right)$. Deduzca entonces que $|0,\ell\rangle$ es un estado coherente del oscilador ordinario. ¿Cuál es el valor de α correspondiente?

(e) Calcule la varianza de la posición y del momento en el estado $|n,\ell\rangle$. Verifique que se satisface la relación de incerteza generalizada. ¿Qué sucede para $n = 0$? ¿Qué nos dice esto sobre la función de onda del estado fundamental del oscilador forzado? (Sugerencia: calcule los operadores transformados $e^{ip\ell/\hbar}xe^{-ip\ell/\hbar}$, $e^{ip\ell/\hbar}pe^{-ip\ell/\hbar}$, $e^{ip\ell/\hbar}x^2e^{-ip\ell/\hbar}$, $e^{ip\ell/\hbar}p^2e^{-ip\ell/\hbar}$, y luego use las expresiones de los valores medios de posición y momento del oscilador ordinario calculados en el ejercicio **P2**).

(f) Usando la representación de Heisenberg, calcule $x(t)$ y $p(t)$. Use esto para luego calcular $\langle x(t)\rangle$ y $\langle p(t)\rangle$ para un autoestado de energía $|n,\ell\rangle$.

P10 **Movimiento de un electrón libre en un campo magnético.** El Hamiltoniano de un electrón en presencia de un campo magnético externo estático con potencial vector $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x,y,z)\right)^2 .$$

Definimos los operadores Π_i, $i = x,y,z$ como

$$\Pi_i = p_i - \frac{eA_i}{c}.$$

(a) Escriba el Hamiltoniano en función de los operadores Π_i.

(b) Calcule $[x_i, \Pi_j]$ (donde x_i, $i = 1,2,3$ son los operadores de posición x, y, z). ¿Qué relaciones de conmutación se obtienen? Interprete.

(c) Calcule $[\Pi_i, \Pi_j]$. Interprete.

Considere el caso en que el campo magnético es uniforme en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, es decir $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. En tal caso, en un gauge apropiado se puede tomar como potencial vector $\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x(x,y)\hat{\boldsymbol{x}} + A_y(x,y)\hat{\boldsymbol{y}}$, con $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$. En este gauge tenemos que $\Pi_z = p_z$.

(d) Muestre que entonces $[p_z, H] = 0$. ¿Qué consecuencias tiene esto? ¿Cuáles son los autovalores del operador p_z?

(e) ¿Cuánto vale el conmutador $[\Pi_x, \Pi_y]$ en este caso? Muestre que redefiniendo los operadores Π_x y Π_y multiplicándolos por una constante apropiada, se obtiene la relación de conmutación canónica.

(f) Concluya entonces que los autovalores del Hamiltoniano del electrón en el campo magnético uniforme son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{R}$. Interprete.

P11 Considere una partícula en una dimensión cuyo movimiento está gobernado por el Hamiltoniano

$$H = \hbar g (a^\dagger a)^2,$$

donde $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{\sigma} + i\frac{p}{\hbar\sigma})$ y g y σ son constantes positivas con unidades de frecuencia y longitud, respectivamente.

(a) Calcule los autoestados y autovalores de H.

(b) Suponga que a $t = 0$ se prepara al sistema en el estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|2\rangle,$$

donde $|0\rangle$, $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son los tres primeros estados del oscilador armónico con frecuencia $\omega = \hbar/(m\sigma^2)$. ¿Cuál es la probabilidad de que a tiempo T el sistema esté en su estado fundamental?

(c) Suponga ahora que a $t = 0$ se prepara al sistema en un estado coherente de un oscilador armónico de frecuencia $\omega = \hbar/(m\sigma^2)$, $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$. ¿Cómo es $|\psi(T)\rangle$? Escriba $|\psi(T)\rangle$ en los casos en que $T = 2\pi/g$ y $T = \pi/g$.

(d) Para el caso $T = \pi/(2g)$, muestre que

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\pi/4} |\alpha\rangle + e^{i\pi/4} |-\alpha\rangle \right)$$

(e) Si α es imaginario puro, discuta las propiedades físicas del estado descrito en (d). En ese caso calcule el valor medio de la posición y el momento.