

El operador impulso angular

Para las **traslaciones**, consideramos desplazamientos infinitesimales según cada eje, e introducimos el impulso lineal \mathbf{P} como el generador de traslaciones infinitesimales.

Para las **rotaciones**, consideramos rotaciones infinitesimales alrededor de cada eje, e introducimos el impulso angular \mathbf{J} como el generador de rotaciones infinitesimales.

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\mathbf{i}, dr) = 1 - \frac{i}{\hbar} dr P_x \\ D(\mathbf{j}, dr) = 1 - \frac{i}{\hbar} dr P_y \\ D(\mathbf{k}, dr) = 1 - \frac{i}{\hbar} dr P_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U_R(\mathbf{i}, d\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\theta J_x \\ U_R(\mathbf{j}, d\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\theta J_y \\ U_R(\mathbf{k}, d\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\theta J_z \end{array} \right.$$

Los \mathbf{P} son operadores hermíticos, la conmutación de las traslaciones $\Rightarrow [P_x, P_y] = 0$

Los \mathbf{J} son operadores hermíticos, la no-conmutación de las rotaciones $\Rightarrow [J_x, J_y] \neq 0$

Representaciones del grupo de las rotaciones

Rotación infinitesimal en dirección arbitraria como producto de rotaciones según los ejes $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\begin{aligned}R(\mathbf{u}, d\theta) \mathbf{A} &= \mathbf{A} + d\theta \mathbf{u} \times \mathbf{A} \\&= \mathbf{A} + u_x d\theta \mathbf{i} \times \mathbf{A} + u_y d\theta \mathbf{j} \times \mathbf{A} + u_z d\theta \mathbf{k} \times \mathbf{A} \\&= R(\mathbf{i}, u_x d\theta) R(\mathbf{j}, u_y d\theta) R(\mathbf{k}, u_z d\theta) \mathbf{A}\end{aligned}$$

Como los operadores $U_R(\mathbf{u}, d\theta)$ representan las rotaciones, deben satisfacer

$$\begin{aligned}U_R(\mathbf{u}, d\theta) &= U_R(\mathbf{i}, u_x d\theta) U_R(\mathbf{j}, u_y d\theta) U_R(\mathbf{k}, u_z d\theta) \\&= \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\theta u_x J_x\right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\theta u_y J_y\right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\theta u_z J_z\right) \\&= 1 - \frac{i}{\hbar} d\theta (u_x J_x + u_y J_y + u_z J_z) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J}\end{aligned}$$

Al igual que como hicimos con el operador desplazamiento:

$$U_R(\mathbf{u}, d\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J} \quad \Longrightarrow$$

$$U_R(\mathbf{u}, \theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J}\right)$$

El operador rotación

Al igual que como hicimos con el operador desplazamiento:

$$U_R(\mathbf{u}, \theta + d\theta) = U_R(\mathbf{u}, d\theta) U_R(\mathbf{u}, \theta) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J}\right) U_R(\mathbf{u}, \theta) = U_R(\mathbf{u}, \theta) - \frac{i}{\hbar} d\theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J} U_R(\mathbf{u}, \theta)$$

$$\frac{dU_R(\mathbf{u}, \theta)}{d\theta} = \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{U_R(\mathbf{u}, \theta + d\theta) - U_R(\mathbf{u}, \theta)}{d\theta} = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{u} \cdot \mathbf{J} U_R(\mathbf{u}, \theta)$$

$$U_R(\mathbf{u}, \theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J}\right)$$

Representaciones del grupo de las rotaciones

El grupo de las traslaciones es conmutativo,

$$D_i D_j = D_j D_i \Rightarrow [P_i, P_j] = 0$$

pero el de las rotaciones no:

$$R(\mathbf{i}, d\alpha) R(\mathbf{j}, d\beta) \neq R(\mathbf{j}, d\beta) R(\mathbf{i}, d\alpha)$$

Calculemos el conmutador a segundo orden en $d\alpha$ y $d\beta$:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{i}, d\alpha) R(\mathbf{j}, d\beta) \mathbf{A} &= R(\mathbf{i}, d\alpha) (\mathbf{A} + d\beta \mathbf{j} \times \mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{A} + d\beta \mathbf{j} \times \mathbf{A}) + d\alpha \mathbf{i} \times (\mathbf{A} + d\beta \mathbf{j} \times \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{A} + d\beta \mathbf{j} \times \mathbf{A} + d\alpha \mathbf{i} \times \mathbf{A} + d\alpha d\beta \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

$$R(\mathbf{j}, d\beta) R(\mathbf{i}, d\alpha) \mathbf{A} = \mathbf{A} + d\alpha \mathbf{i} \times \mathbf{A} + d\beta \mathbf{j} \times \mathbf{A} + d\beta d\alpha \mathbf{j} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{A})$$

$$[R(\mathbf{i}, d\alpha), R(\mathbf{j}, d\beta)] \mathbf{A} = d\alpha d\beta [\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{A}) - \mathbf{j} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{A})] = d\alpha d\beta \mathbf{k} \times \mathbf{A}$$

$$[R(\mathbf{i}, d\alpha), R(\mathbf{j}, d\beta)] = R(\mathbf{k}, d\alpha d\beta) - 1$$

Representaciones del grupo de las rotaciones

Los operadores $U_R(\mathbf{u}, \theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J}\right)$ que representan rotaciones deben verificar entonces :

$$\boxed{[U_R(\mathbf{i}, d\alpha), U_R(\mathbf{j}, d\beta)] = U_R(\mathbf{k}, d\alpha d\beta) - 1}$$

$$\begin{cases} U_R(\mathbf{i}, d\alpha) U_R(\mathbf{j}, d\beta) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha J_x\right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\beta J_y\right) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha J_x - \frac{i}{\hbar} d\beta J_y - \frac{1}{\hbar^2} d\alpha d\beta J_x J_y \\ U_R(\mathbf{j}, d\beta) U_R(\mathbf{i}, d\alpha) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\beta J_y\right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha J_x\right) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\beta J_y - \frac{i}{\hbar} d\alpha J_x - \frac{1}{\hbar^2} d\beta d\alpha J_y J_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} [U_R(\mathbf{i}, d\alpha), U_R(\mathbf{j}, d\beta)] = -\frac{1}{\hbar^2} d\alpha d\beta [J_x, J_y] \\ U_R(\mathbf{k}, d\alpha, d\beta) - 1 = -\frac{i}{\hbar} d\alpha d\beta J_z \end{cases}$$

$$[U_R(\mathbf{i}, d\alpha), U_R(\mathbf{j}, d\beta)] = U_R(\mathbf{k}, d\alpha d\beta) - 1 \quad \iff$$

$$\boxed{[J_x, J_y] = i\hbar J_z}$$

El álgebra de Lie del grupo de Lie

La fórmula

$$U_R(\mathbf{u}, \theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J}\right)$$

es un mapeo entre el espacio vectorial de operadores hermíticos cuya base es $\{J_x, J_y, J_z\}$, y el grupo de operadores unitarios. Ambos son de dimensión 3.

El producto en el grupo determina el conmutador en el espacio: $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$

El espacio vectorial es cerrado ante conmutaciones \Rightarrow es un álgebra de Lie.

La inversa también es cierta, el conmutador determina el producto:

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} \{ [A, [A, B]] + [B, [B, A]] \} + \dots\right)$$

Se dice así que $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$ es el álgebra de Lie del grupo de las rotaciones.

Autovalores y autoestados del impulso angular

La relación de conmutación $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$ determina los posibles autovalores y autoestados del impulso angular.

Definimos : $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$

que satisface : $[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$

y buscamos autoestados de J^2 y J_z :

$$J^2 |a, b\rangle = a\hbar^2 |a, b\rangle$$

$$J_z |a, b\rangle = b\hbar |a, b\rangle$$

$(a, b \in \mathbb{R})$

Definimos operadores de subida y bajada :

$$J_+ = J_-^\dagger \quad [J^2, J_\pm] = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_+ = J_x + iJ_y \\ J_- = J_x - iJ_y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{array} \right.$$

que satisfacen :

$$\left\{ \begin{array}{l} [J_z, J_+] = \hbar J_+ \\ [J_z, J_-] = -\hbar J_- \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \\ J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \end{array} \right.$$

Autovalores y autoestados del impulso angular

Los operadores J_+ y J_- se llaman de subida y bajada pues satisfacen :

$$\begin{cases} J_z [J_{\pm} |a, b\rangle] = (b \pm 1) \hbar [J_{\pm} |a, b\rangle] \\ J^2 [J_{\pm} |a, b\rangle] = a \hbar^2 [J_{\pm} |a, b\rangle] \end{cases}$$

lo que equivale a decir :

$$\begin{cases} J_+ |a, b\rangle = \alpha |a, b+1\rangle \\ J_- |a, b\rangle = \beta |a, b-1\rangle \end{cases}$$

Los factores α y β salen por normalización de la base $\{|a, b\rangle\}$:

$$\alpha |a, b+1\rangle = J_+ |a, b\rangle$$

$$|\alpha|^2 \langle a, b+1 | a, b+1 \rangle = \langle a, b | J_- J_+ | a, b \rangle$$

$$|\alpha|^2 = \langle a, b | (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) | a, b \rangle = (a - b^2 - b) \hbar^2$$

$$\alpha = \sqrt{a - b^2 - b} \hbar$$

Análogamente :

$$\beta = \sqrt{a - b^2 + b} \hbar$$

Autovalores y autoestados del impulso angular

$$\begin{cases} J_+ |a, b\rangle = \sqrt{a-b^2-b} \hbar |a, b+1\rangle \\ J_- |a, b\rangle = \sqrt{a-b^2+b} \hbar |a, b-1\rangle \end{cases}$$

① $a \geq b^2$:

$$(a-b^2)\hbar^2 = \langle a, b | (J^2 - J_z^2) | a, b \rangle = \langle a, b | J_x^2 | a, b \rangle + \langle a, b | J_y^2 | a, b \rangle = \|J_x |a, b\rangle\|^2 + \|J_y |a, b\rangle\|^2 \geq 0$$

② Como J_+ sube b sin cambiar a , tiene que haber un b_{\max} que $J_+ |a, b_{\max}\rangle = 0$

③ Como J_- baja b sin cambiar a , tiene que haber un b_{\min} que $J_- |a, b_{\min}\rangle = 0$

④ Aplicando J_- repetidas veces, se debe ir de $|a, b_{\max}\rangle$ a $|a, b_{\min}\rangle$: $b_{\min} = b_{\max} - n$

$$\textcircled{2} \text{ y } \textcircled{3} \Rightarrow \begin{cases} a - b_{\max}^2 - b_{\max} = 0 \\ a - b_{\min}^2 + b_{\min} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b_{\max} (b_{\max} + 1) \\ a = b_{\min} (b_{\min} - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{\min} = -b_{\max} \\ b_{\min} = b_{\max} + 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{4} \Rightarrow b_{\max} = b_{\min} + n \\ \textcircled{2} \text{ y } \textcircled{3} \Rightarrow b_{\max} = -b_{\min} \end{array} \right\} \boxed{b_{\max} = \frac{n}{2}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Autovalores y autoestados del impulso angular

Resumiendo :
$$\begin{cases} J^2 |a, b\rangle = a\hbar^2 |a, b\rangle \\ J_z |a, b\rangle = b\hbar |a, b\rangle \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = b_{\max} (b_{\max} + 1) \\ b_{\max} = \frac{n}{2} \\ b_{\min} = -b_{\max} \end{cases}$$

Pasamos de la notación $\{|a, b\rangle\}$ a la $\{|j, m\rangle\}$:

$$\begin{cases} j \equiv \frac{n}{2} : & a = b_{\max} (b_{\max} + 1) \Rightarrow a = j(j+1) \\ m \equiv b : & b_{\min} \leq b \leq b_{\max} \Rightarrow -j \leq m \leq j \end{cases}$$

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle$$

$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \hbar |j, m+1\rangle$$

$$J_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \hbar |j, m-1\rangle$$

$$j = \frac{n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^0)$$

$$-j \leq m \leq j \quad (2j+1 \text{ valores})$$

Representaciones matriciales del impulso angular

Para $j = \frac{1}{2}$, en la base $\left\{ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\} = \{ |+\rangle, |-\rangle \}$:

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Representaciones matriciales del impulso angular

Para $j = 1$, en la base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$:

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Representaciones matriciales del impulso angular

Para $j = \frac{3}{2}$, en la base $\{|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle\}$:

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Representaciones matriciales del operador rotación

Conocidas las representaciones (subespacios invariantes) de \mathbf{J} , podemos calcular las representaciones del operador rotación, $U_R(\mathbf{u}, \theta) = \exp(-\frac{i}{\hbar} \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J})$ para cada j :

$$\langle j, m' | U_R(\mathbf{u}, \theta) | j, m \rangle = \mathcal{D}_{m', m}^j(\mathbf{u}, \theta)$$

$$\langle j, m' | U_R(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle = \mathcal{D}_{m', m}^j(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\langle j, m' | U_R(\mathbf{y}, \beta) | j, m \rangle = d_{m', m}^j(\beta)$$

$$\mathcal{D}_{m', m}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im'\alpha} e^{-im\gamma} d_{m', m}^j(\beta)$$

En particular para $j = \frac{1}{2}$:

$$\exp(-\frac{i}{\hbar} \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{J}) = \exp(-i \frac{\theta}{2} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \cos \frac{\theta}{2} - i \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{u}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - i u_z \sin \frac{\theta}{2} & -(i u_x + u_y) \sin \frac{\theta}{2} \\ -(i u_x - u_y) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} + i u_z \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad d^{\frac{1}{2}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Representaciones matriciales del operador rotación

Para $j = \frac{1}{2}$, en la base $\{|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\}$:

$$d^{\frac{1}{2}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Para $j = 1$, en la base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$:

$$d^1(\beta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \beta & -\sqrt{2} \sin \beta & 1 - \cos \beta \\ \sqrt{2} \sin \beta & 2 \cos \beta & -\sqrt{2} \sin \beta \\ 1 - \cos \beta & \sqrt{2} \sin \beta & 1 + \cos \beta \end{pmatrix}$$