Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 3: Fundamentos

I. Mediciones

P1 Una partícula con spin 1 tiene un momento angular intrínseco que puede tomar los valores $+\hbar, 0, -\hbar$. Representaremos este sistema físico mediante un espacio de Hilbert de dimensión 3. Dada una base ortonormal de este espacio, $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$, definimos los operadores

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = -i\hbar\,|a\rangle\langle c| + i\hbar\,|c\rangle\langle a|\,, \quad \begin{cases} L_z\,|a\rangle = \hbar\,|b\rangle\,, \\ L_z\,|b\rangle = \hbar\,|a\rangle\,, \\ L_z\,|c\rangle = 0 \end{cases}$$

(a) Verifique que los tres operadores L_j $(j = x, y, z)$ representan observables (es decir son operadores Hermíticos).

(b) Muestre que los tres operadores, L_j, tienen los mismos autovalores: $m_j = 1, 0, -1$ (en unidades de $\hbar$). Calcule además los correspondientes autovectores para cada uno de los observables.

(c) Verifique que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación $[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l$.

(d) Suponga que tiene a su disposición tres tipos de aparatos de Stern–Gerlach que separan un haz entrante en tres haces cada uno correspondiendo a los autovalores de m_x, m_y o m_z. Discuta como utilizar estos aparatos para medir L_x, L_y o L_z.

(e) Suponga que se prepara un estado con $m_x = 1$ y se mide L_y, ¿cuáles son los resultados posibles y cuáles son sus respectivas probabilidades? Suponga que se obtiene como resultado $m_y = 0$, escriba el estado del sistema después de la medición.

(f) A continuación se mide L_x, ¿cuáles son los resultados posibles y cuáles sus probabilidades? Si se obtiene el resultado $m_x = -1$, escriba el estado después de la medición.

P2 Considere un sistema físico cuyo espacio de estados es de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Sea $A = a\,|1\rangle\langle 1| + a\,|2\rangle\langle 3| + a\,|3\rangle\langle 2|$ (con $a \in \mathbb{R}$) un observable y suponga que el sistema se encuentra inicialmente en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\,|1\rangle + \frac{1}{2}\,|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|3\rangle$$

(a) Calcule los autoestados y autovalores de A. ¿Está degenerado el espectro de A?

(b) Escriba $|\psi\rangle$ en la base de autoestados de A.

(c) Si se mide A sobre el estado $|\psi\rangle$, ¿qué resultados puede obtener y con qué probabilidad?

(d) Si el resultado de la medición del ítem anterior fuese $-a$, escriba el estado del sistema después de la medición. Si en cambio el resultado de la medición hubiese sido a, ¿cuál sería el estado del sistema luego de la medición?

P3 Considere un sistema cuántico descripto por un espacio de estados de dimensión 3. Sea $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ una base ortonormal y considere los observables

$$\begin{aligned} A &= a\,|u_1\rangle\langle u_1| + a\,|u_2\rangle\langle u_2| - a\,|u_3\rangle\langle u_3| \\ B &= b\,|u_1\rangle\langle u_2| + b\,|u_2\rangle\langle u_1| + b\,|u_3\rangle\langle u_3| \\ C &= c\,|u_1\rangle\langle u_1| + c\,|u_2\rangle\langle u_3| + c\,|u_3\rangle\langle u_2| \end{aligned}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se sabe además que el sistema se encuentra inicialmente en el estado

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,|u_1\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}\,|u_2\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\,|u_3\rangle$$

(a) Calcule $[A, B]$ y $[A, C]$. ¿Cuáles de estos pares de observables son compatibles?

(b) i. Suponga que primero se mide el observable A sobre el estado $|\psi_0\rangle$ y se obtiene como resultado a, ¿cuál es el estado después de la medición y cuál es la probabilidad de que esto ocurra? A continuación, (suponiendo el resultado a de la primer medición) se mide el observable B, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación de resultados $\{a, -b\}$?

ii. Suponga ahora que, en cambio, primero se mide sobre el estado $|\psi_0\rangle$ el observable B. Si se obtiene el resultado $-b$, escriba entonces el estado luego de la medición (¿cuál es la probabilidad correspondiente?) A continuación se mide A, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación de resultados $\{-b, a\}$?

(c) i. Suponga que primero se mide el observable A sobre el estado $|\psi_0\rangle$ y se obtiene como resultado a, ¿cuál es el estado después de la medición y cuál es la probabilidad de que esto ocurra? A continuación, (suponiendo el resultado a de la primer medición) se mide el observable C, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación de resultados $\{a, -c\}$?

ii. Suponga ahora que, en cambio, primero se mide sobre el estado $|\psi_0\rangle$ el observable C. Si se obtiene el resultado $-c$, escriba entonces el estado luego de la medición (¿cuál es la probabilidad correspondiente?) A continuación se mide A, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación de resultados $\{-c, a\}$?

(d) ¿Cómo se relacionan los resultados obtenidos en los ítems (b) y (c) con lo encontrado en (a)?

P4 **Distinguibilidad de estados.** Considere un sistema físico que se sabe está en uno de dos posibles estados, $|\psi_1\rangle$ o $|\psi_2\rangle$.

(a) Suponga que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son ortogonales. ¿Es posible, en principio, realizar alguna medición sobre el sistema cuyo resultado permita distinguir con certeza entre los dos estados? De ser posible, defina algún observable que permita distinguir los dos estados.

(b) Considere ahora que los dos estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ no son ortogonales. ¿Puede ahora definir algún observable que distinga con certeza los dos estados? ¿Por qué?

(c) En base a lo obtenido en los ítems anteriores discuta la veracidad y el significado de la siguiente afirmación: *los únicos estados cuánticos distinguibles con certeza son los estados mutuamente ortogonales.*

II. Conjuntos completos de observables que conmutan

P5 Considere un sistema de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Considere los observables A, B y C dados por

$$A = a\,(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - a\,|3\rangle\langle 3|\ ,$$
$$B = b\,(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|) - b\,|2\rangle\langle 2|\ ,$$
$$C = c\,(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + 2c\,|3\rangle\langle 3|\ ,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Determine qué combinaciones de los operadores A, B y C conmutan entre sí y en tales casos encuentre una base común de autoestados.

(b) Suponga que se miden los observables A y B sobre el sistema y se obtienen como resultados a y b. ¿Puede decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

(c) Suponga ahora que en cambio se miden los observables A y C sobre el sistema, obteniendo los resultados a y c. ¿Puede ahora decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

(d) Diga qué combinaciones de los operadores A, B y C forman un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC).

$\boxed{\textbf{P6}}$ Considere el sistema de spin 1 del problema $\boxed{\textbf{P1}}$ y calcule los operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2.

(a) Diga cuáles son sus autovalores y autovectores. ¿Conmutan los operadores? Determine qué combinaciones de estos observables forman un CCOC. ¿Cuál es la base común de autovectores?

(b) Suponga que se prepara un autoestado de L_x con $m_x = 1$ y se mide L_z^2. ¿Cuáles son los resultados posibles y sus probabilidades?

(c) Repita el ítem anterior pero para los casos en que el estado inicial sobre el que se mide L_z^2 es el autoestado $m_y = 0$ o $m_z = 1$.

(d) Discuta cómo se puede hacer para medir simultáneamente los tres operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2. Diseñe un instrumento que mida estos operadores usando los aparatos de Stern–Gerlach que separan el haz de acuerdo a los valores de L_j (recuerde que el proceso de separación de un haz en tres, que es efectuado aplicando un campo magnético apropiado, puede ser revertido totalmente).

$\boxed{\textbf{P7}}$ Considere un sistema de dimensión 4. Sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ una base ortonormal del espacio tal que tres dados observables A, B y C están dados por

$$A = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = b\,|1\rangle\langle 1| + b\,|2\rangle\langle 2| - b\,|3\rangle\langle 4| - b\,|4\rangle\langle 3|, \quad \begin{cases} C\,|1\rangle = c\,|1\rangle + ic\,|2\rangle \\ C\,|2\rangle = c\,|2\rangle - ic\,|1\rangle \\ C\,|3\rangle = c\,|4\rangle \\ C\,|4\rangle = c\,|3\rangle \end{cases},$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Determine qué combinaciones de los operadores A, B y C conmutan entre sí y en tales casos encuentre una base común de autoestados.

(b) Diga qué combinaciones de los operadores A, B y C forman un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC). En los casos en que los operadores conmutan, pero no forman un conjunto completo, proponga un nuevo observable que junto a ellos sí forme un CCOC.

III. Principio de incertidumbre

$\boxed{\textbf{P8}}$ Dados un observable A y un estado $|\psi\rangle$, definimos el operador

$$\Delta A = A - \langle A \rangle ,$$

donde el valor medio es respecto de $|\psi\rangle$. Mostrar entonces que

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 ,$$

donde todos los valores medios son siempre para el estado $|\psi\rangle$.

Concluir entonces que $\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle$ es la varianza del resultado de la medición de A en el estado $|\psi\rangle$.

$\boxed{\textbf{P9}}$ **Derivación del principio de incertidumbre.** [ver sección 1.4 Sakurai]

(a) En primer lugar, se propone una forma de derivar la desigualdad de Schwarz. Observe que

$$(\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda\,|\beta\rangle) \geq 0$$

para cualquier número complejo λ. Luego, elija λ de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz, $\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$.

(b) Para dos observables A y B y un estado cualquiera, pruebe la relación de incerteza generalizada de Robertson–Schrödinger

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle [A,B] \rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle \{A,B\} \rangle - 2\,\langle A \rangle \langle B \rangle|^2 ,$$

donde $\Delta A = A - \langle A \rangle$.

(c) Muestre que de la relación anterior se desprende la relación de incerteza de Heisenberg generalizada usual

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

(d) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene si y sólo si el estado en cuestión satisface

$$\Delta A \,|\alpha\rangle = \lambda \Delta B \,|\alpha\rangle$$

donde λ es un imaginario puro.

P10 Considere una partícula con spin 1/2.

(a) Muestre que para todo estado $|\psi\rangle$ vale que

$$\mathrm{Var}\,(S_j)\,\mathrm{Var}\,(S_k) \geq \frac{\hbar^2}{4} |\langle S_l \rangle|^2$$

donde $\mathrm{Var}(A) = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2$ es la varianza del respectivo operador en el estado $|\psi\rangle$. (Ayuda: recordar que $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$ y utilizar las propiedades de las matrices de Pauli vistas en la guía 1). Para el caso particular en que $|\psi\rangle$ es un autoestado de S_z, evalúe la desigualdad anterior para los casos $j, k, l = z, x, y$ y $j, k, l = z, y, x$. Interprete el resultado.

(b) Para el autoestado $+\hbar/2$ de S_z, calcule explícitamente las varianzas de S_x y de S_y. Utilice estos resultados para verificar que se satisface la relación de incerteza generalizada,

$$\mathrm{Var}\,(S_x)\,\mathrm{Var}\,(S_y) \geq \frac{1}{4} |\langle [S_x, S_y] \rangle|^2$$

(c) Encuentre la combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$ que maximiza el producto $\mathrm{Var}\,(S_x)\,\mathrm{Var}\,(S_y)$. Verifique que para la combinación lineal que encontró, la relación de incerteza para S_x y S_y no se viola.

P11 **Incerteza mínima y paquetes Gaussianos.** Decimos que un estado $|\psi\rangle$ es un paquete Gaussiano si su función de onda es de la forma

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} \exp\left[\frac{i p_0 x}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4\sigma_x^2}\right] ,$$

donde $x_0, p_0, \sigma_x \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que la densidad de probabilidad en x es una densidad de probabilidad normal con valor medio x_0 y desviación estándar σ_x.

(b) Verifique que la densidad de probabilidad en p, $|\langle p|\psi\rangle|^2 = |\psi(p)|^2$ es una densidad normal con valor de expectación p_0 y desviación estándar $\sigma_p = \hbar/(2\sigma_x)$.

(c) Usando lo anterior verifique que el paquete de onda Gaussiano satisface la relación de incerteza posición–momento mínima

$$\sqrt{\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle} \sqrt{\left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle} = \frac{\hbar}{2} \, .$$

(d) Muestre que la condición necesaria para tener incerteza mínima,

$$\langle x|\Delta x|\psi\rangle = c \,\langle x|\Delta p|\psi\rangle \ ,$$

con c imaginario, se satisface, en acuerdo con lo obtenido en **P9** d).

(e) Finalmente, partiendo de la condición necesaria para tener un paquete de incerteza mínima

$$\langle x|\Delta x|\psi\rangle = c \,\langle x|\Delta p|\psi\rangle \ ,$$

demuestre que todo estado $|\psi\rangle$ que satisface esta condición es necesariamente un paquete de onda Gaussiano.

Ayudas:

- La densidad de probabilidad normal es: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, con μ el valor medio de z y σ su desviación estándar.
- Sea $\mathcal{F}\left[f(x)\right](k)$ la transformada de Fourier de $f(x)$ evaluada en k, vale que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f(x-a)\right](k) &= e^{-ika}\mathcal{F}\left[f(x)\right](k) \\
\mathcal{F}\left[f(x)e^{iax}\right](k) &= \mathcal{F}\left[f(x)\right](k-a) \\
\mathcal{F}\left[e^{-\alpha x^2}\right](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp\left[-\frac{k^2}{4\alpha}\right]
\end{aligned}$$

P12 La funciones de onda estacionarias de una partícula en un pozo de potencial

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

están dadas por

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(k_n x\right) & 0 < x < L \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $k_n = n\pi/L$ y $n \in \mathbb{N}$. Evalúe $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle$ para estos estados.