Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 6: Rotaciones y Momento Angular

I. Representación de Rotaciones y Momento Angular en Mecánica Cuántica

P1 Sea $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ un operador de momento angular, es decir que sus componentes satisfacen las relaciones de conmutación

$$[J_j, J_k] = i\hbar\,\varepsilon_{jkl}\,J_l.$$

(a) Se definen los operadores de subida (J_+) y bajada (J_-) de la forma

$$J_+ = J_x + iJ_y, \qquad J_- = J_x - iJ_y.$$

Demostrar las siguientes propiedades

$$\left[J^2, J_i\right] = 0, \qquad [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm, \qquad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z,$$
$$J_+J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z, \qquad J_-J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z.$$

(b) Sea $\{|j,m\rangle\}$ la base de autoestados simultáneos de J^2 y J_z, es decir que

$$J^2\,|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|j,m\rangle\,, \qquad J_z\,|j,m\rangle = \hbar m\,|j,m\rangle\,.$$

Demostrar las siguientes propiedades

$$J_\pm\,|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j,m\pm 1\rangle\,, \qquad J_\pm\,|j,\pm j\rangle = 0.$$

P2 Suponga que un sistema se encuentra en un autoestado de J_z con autovalor $\hbar m$.

(a) Muestre que los valores medios tanto de J_x como J_y son cero, i.e. $\langle J_x\rangle = \langle J_y\rangle = 0$, de dos formas diferentes: (i) usando el principio de incertidumbre, y (ii) usando la expansión de J_x y J_y en términos de J_+ y J_-.

(b) Muestre que si se mide la projección de momento angular en la sobre una dirección $\hat{\boldsymbol{n}}$ que forma un ángulo θ con el eje $\hat{\boldsymbol{z}}$, entonces

$$\langle \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\rangle = \hbar m\cos\theta.$$

P3 Considere un sistema de spin 1/2 (es decir $j = 1/2$).

(a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y bajada, la representación matricial de los operadores S^2, S_x, S_y y S_z en la base de autoestados de S_z. Muestre que se obtiene que los operadores de spin están dados por $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, donde σ_i son las matrices de Pauli.

(b) Usando las propiedades de conmutación ($[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$) y anticonmutación ($\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbb{I}$) de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\mathbb{I} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos vectores complejos en tres dimensiones. (Ayuda: recuerde que $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i = \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}a_j b_k$ y que todo producto de dos operadores se puede reescribir como $AB = ([A,B] + \{A,B\})/2$).

(c) Usando los resultados anteriores, muestre que el operador rotación para un sistema de spin 1/2 se puede escribir como

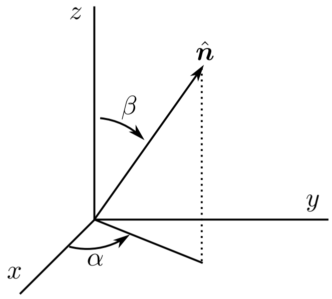
$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\phi}{\hbar}\right) = \mathbb{I}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad.

(d) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)$ en la base

$$\left\{ |+\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle, |-\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}.$$

(e) Sea $\hat{\boldsymbol{n}}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplique al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado† para obtener el estado $|\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, +\rangle$, que representa un spin orientado según $\hat{\boldsymbol{n}}$. Compare el resultado con el obtenido en el Problema 10 de la Guía 1.



† Pruebe a hacer la cuenta de dos formas diferentes: (i) aplicando una única rotación en una ángulo y dirección adecuados, y (ii) descomponiendo la rotación en rotaciones elementales utilizando los ángulos de Euler.

(f) Muestre que para una rotación en $\phi = 2\pi$ se satisface

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi = 2\pi) = -\mathbb{I},$$

y, por lo tanto, ante una rotación en 2π el estado del sistema cambia según

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, 2\pi)]{} \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, 2\pi) |\psi\rangle = -|\psi\rangle .$$

Observe que no se obtiene el mismo vector debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pág. 24.

P4 Considere un estado arbitrario $|\psi\rangle$ de un sistema de spin 1/2, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje $\hat{\boldsymbol{z}}$, es decir

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{z}}, \varphi) |\psi\rangle = \exp\left(-i \frac{S_z \varphi}{\hbar}\right) |\psi\rangle .$$

Calcule los valores medios $\langle\psi'|S_x|\psi'\rangle$, $\langle\psi'|S_y|\psi'\rangle$ y $\langle\psi'|S_z|\psi'\rangle$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle\psi|S_x|\psi\rangle$, $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$ y $\langle\psi|S_z|\psi\rangle$ en el sistema original.

P5 Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de spin 1/2 representada por

$$\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}}, \alpha)\, \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{y}}, \beta)\, \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}}, \gamma).$$

(a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp\left(-i \frac{\sigma_z \alpha}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\sigma_y \beta}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\sigma_z \gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

$\boxed{\textbf{P6}}$ Considere un sistema con momento angular 1 (es decir, $j = 1$).

(a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, la representan matricial de los operadores J^2, J_x, J_y, y J_z en la base $\{|j=1,m=1\rangle, |j=1,m=0\rangle, |j=1,m=-1\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_z. Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$.

(b) Encuentre la base $\{|j=1,m_y\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_y, como combinación lineal de los $\{|j=1,m\rangle\}$.

(c) Evalúe los elementos de matriz de $J_z(J_z+\hbar)(J_z-\hbar)$ y de $J_x(J_x+\hbar)(J_x-\hbar)$ en la base $\{|j=1,m\rangle\}$ sin usar la representación matricial de J_x.

(d) Muestre que en el caso de momento angular $j = 1$, vale que

$$\mathcal{D}^{(1)}(\hat{\boldsymbol{y}}, \beta) = e^{-iJ_y\beta/\hbar} = 1 - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\sin\beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)\,.$$

Usando esto obtenga

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \cos\beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) \end{pmatrix},$$

donde $d(\beta)$ es la representación matricial de $\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{y}}, \beta)$ en la base de autoestados de J_z.

$\boxed{\textbf{P7}}$ Considere un sistema con $j = 1$ que se encuentra en el estado $|\psi\rangle$ dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|j=1,m=1\rangle - |j=1,m=-1\rangle\right).$$

(a) Si se mide L_x sobre $|\psi\rangle$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide L_y.

(b) Suponga que sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide L_z y se obtiene $\hbar$, e inmediatamente después se mide L_y. ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

$\boxed{\textbf{P8}}$ Dado un conjunto de tres operadores, $\{A_1, A_2, A_3\}$, ¿cuál es el significado de la ecuación $U^{-1}A_kU = \sum_l R_{kl}A_l$, donde R_{kl} es una matriz de rotación? A partir de esta ecuación, muestre que los elementos de matriz $\langle m| A_k |n\rangle$ se transforman como vectores ante la transformación U.

$\boxed{\textbf{P9}}$ Un autoestado de momento angular $|j,j\rangle$ se rota en un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje $\hat{\boldsymbol{y}}$. Sin usar explícitamente la forma de la matriz $d^{(j)}_{m'm}$, obtenga una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado rotado se encuentre en el estado original, hasta términos de orden ϵ^2.

II. Momento Angular Orbital

$\boxed{\textbf{P10}}$ Construya los armónicos esféricos Y_1^m. Para ello, resuelva primero $L_+Y_1^1 = 0$ (usando L_+ en la representación r) y luego aplique el operador L_- a Y_1^1 (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados de $\boxed{\textbf{P6}}$, escriba la combinación lineal de los armónicos esféricos $\{Y_1^m\}$ que es autoestado de L_y con autovalor $\hbar$. Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación r.

$\boxed{\textbf{P11}}$ Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l para el impulso angular orbital, por ejemplo $l = 1/2$. A partir de

$$L_+\,Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) = 0,$$

podemos deducir

$$Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) \propto e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}.$$

Verifique esta afirmación. Intente construir entonces $Y_{1/2}^{-1/2}(\theta,\phi)$ de dos maneras diferentes,

(a) aplicando L_- a $Y_{1/2}^{1/2}(\theta, \phi)$,

(b) usando que $L_- Y_{1/2}^{-1/2}(\theta, \phi) = 0$.

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l).

P12 Considere un autoestado de impulso angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje $\hat{\boldsymbol{y}}$. Encuentre la probabilidad de medir $m = 0$, ± 1, y ± 2 en el nuevo estado.

P13 La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por

$$\Psi(x, y, z) = (x + y + 3z) f(r),$$

con $f(r)$ alguna función de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) ¿Es Ψ autofunción de L^2? Si es así, ¿cuál es el valor de l? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?

(c) Suponga que se sabe de alguna manera que $\Psi(x, y, z)$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

P14 Usando coordenadas esféricas, obtenga una expresión para la corriente de probabilidad $\boldsymbol{j}$ para el estado fundamental y los excitados del átomo de hidrógeno. Muestre en particular que, para los estados con $m \neq 0$, existe un flujo toroidal en el sentido de que $\boldsymbol{j}$ está en la dirección de ϕ creciente o decreciente dependiendo del signo de m.

P15 Considere el Hamiltoniano de un rotor rígido,

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right),$$

donde $\boldsymbol{L}$ es el impulso angular en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. A partir de esta expresión obtenga la ecuación de movimiento de Heisenberg para $\boldsymbol{L}$ y luego halle las ecuaciones de movimiento de Euler en el límite correspondiente.