

Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 7: Suma de Momento Angular

I. Suma de Momento Angular

P1 Considere una partícula de spin $1/2$ en un estado con momento angular orbital $l = 1$.

- (a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.
- (b) Use $J_- = L_- + S_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.
- (c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.
- (d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.
- (e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

P2 Considere un sistema con dos grados de libertad correspondientes a momentos angulares j_1 y j_2 .

- (a) Partiendo de $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J_{\pm} | j, m \rangle$ demuestre la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} & \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \pm 1 \rangle = \\ & \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 \mp 1)} \langle j_1, j_2, m_1 \mp 1, m_2 | j, m \rangle + \\ & \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 \mp 1)} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 \mp 1 | j, m \rangle \end{aligned}$$

- (b) Para el caso de momentos angulares $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$, usando las relaciones de recurrencia, exprese todos los autoestados de momento angular total, $\{|j, m\rangle\}$ (nueve), en términos de los estados producto $\{|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\}$.

P3 Considere dos partículas con spin $1/2$. Calcule todos los coeficientes de Clebsch-Gordan por dos caminos diferentes:

- (a) Escriba los autoestados de spin total S^2 y S_z , $\{|s, m\rangle\}$, en función de los autoestados de S_{1z} , S_{2z} , $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$, usando los operadores S_{\pm} y ortogonalidad (es decir, usando el mismo procedimiento del problema **P1**).
- (b) Escriba las matrices de 4×4 que corresponden a la representación de los operadores

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \quad S_z = S_{1z} + S_{2z},$$

en la base $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza estas matrices. ¿Qué son los coeficientes del cambio de base?

P4 Considere dos grados de libertad de momento angular con j_1 y j_2 y sean $\mathcal{D}^{(j_1)}$ y $\mathcal{D}^{(j_2)}$ los operadores de rotación sobre cada uno de los respectivos grados de libertad. Entonces se puede mostrar que

$$\mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)} \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)} = \sum_{|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2} \sum_{-j \leq m \leq j} \sum_{-j \leq m' \leq j} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j m \rangle \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j m' \rangle \mathcal{D}_{m m'}^{(j)},$$

donde $\mathcal{D}^{(j)}$ es el operador de rotación en el espacio de momento angular total dado por j (ver por ejemplo Sakurai 3.7). Esta relación es útil para calcular los elementos de matriz de la rotación para momento angular j si se conocen los elementos de matriz para j_1 y j_2 . Efectivamente, en este ejercicio veremos como ejemplo cómo usar la relación para escribir los elementos de matriz de $d^{(3/2)}$ a partir de los de $d^{(1)}$, $d^{(1/2)}$, y los coeficientes de Clebsch-Gordan. Para ello,

(a) Usando la relación de completitud de los coeficientes de Clebsch-Gordan,

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j m \rangle \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'},$$

invierta la ecuación del enunciado para obtener

$$\mathcal{D}_{mm'}^{(j)} = \sum_{m_1, m_2} \sum_{m'_1, m'_2} \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)} \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j m \rangle \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j m' \rangle.$$

(b) Utilice la expresión final del inciso (a) para calcular los elementos de matriz de $d^{(3/2)}$ a partir de los de $d^{(1)}$, $d^{(1/2)}$, y los coeficientes de Clebsch-Gordan (para $d^{(1)}$ y $d^{(1/2)}$ use las expresiones encontradas en la Guía de Rotaciones y Momento Angular).

P5 El acoplamiento spin-órbita es un efecto relativista que introduce, a bajas energías, una interacción efectiva entre el spin y el momento angular orbital de una partícula. De esta forma, incluyendo el acoplamiento spin-órbita, el Hamiltoniano electrónico para el átomo de Hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2}, \quad \text{con } H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

y donde \mathbf{S} representa el spin del electrón.

(a) Evalúe los conmutadores

$$[H, L^2], [H, S^2], [H, J^2], [H, L_z], [H, S_z], [H, J_z],$$

donde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

Ayuda: recuerde que en coordenadas polares el operador p^2 se escribe como

$$p^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} L^2.$$

(b) Considere ahora que se enciende un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\hat{z}$, de modo que al Hamiltoniano se le agrega el término

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar} B (L_z + 2S_z).$$

Para este caso, repita el inciso (a).

II. Operadores Vectoriales, Tensores Esféricos y Teorema de Wigner-Eckart

P6 Sean $\{V_x, V_y, V_z\}$ tres operadores. Decimos que V_i son las componentes de un *operador vectorial* si ante rotaciones V_i se transforma de la forma

$$\mathcal{D}^\dagger(R) V_i \mathcal{D}(R) = \sum_j R_{ij} V_j,$$

donde R es la matriz que define la rotación en \mathbb{R}^3 y $\mathcal{D}(R)$ el operador de rotación asociado en el espacio de Hilbert. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$[L_j, V_k] = i\hbar \varepsilon_{jkl} V_l.$$

(a) Verifique que el operador posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es un operador vectorial.

(b) Verifique que el operador momento $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ es un operador vectorial.

(c) Verifique que el operador de momento angular orbital $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ es un operador vectorial.

P7 Sean $\{T_{-k}^{(k)}, T_{-k+1}^{(k)}, \dots, T_{k-1}^{(k)}, T_k^{(k)}\}$ $2k + 1$ operadores. Decimos que $T_q^{(k)}$ son las componentes de un *tensor esférico irreducible* de rango k si ante rotaciones $T_q^{(k)}$ se transforma de la forma

$$\mathcal{D}(R) T_q^{(k)} \mathcal{D}^\dagger(R) = \sum_{q'} \mathcal{D}_{q'q}^{(k)}(R) T_{q'}^{(k)},$$

donde $\mathcal{D}_{q'q}^{(k)}$ son los elementos de matriz del operador de rotación en el subespacio de momento angular k , es decir $\langle kq' | \mathcal{D}(R) | kq \rangle$. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad [J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}.$$

(a) Verifique que si \mathbf{V} es un operador vectorial, entonces los operadores $V_q^{(1)}$ dados por

$$V_{\pm 1}^{(1)} \doteq \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V_0 \doteq V_z,$$

definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(b) Sea \mathbf{V} un operador vectorial. Considere los armónicos esféricos $Y_{l=1}^m(x, y, z)$ en coordenadas cartesianas y sean $V_q^{(1)}$, $q = -1, 0, 1$, operadores definidos de la forma

$$V_q^{(1)} = r Y_1^q(V_x, V_y, V_z),$$

(es decir que en la fórmula de los armónicos esféricos sustituimos las variables x_i por los respectivos operadores V_i). Verifique entonces que los operadores $V_q^{(1)}$ definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(c) Haciendo uso del hecho que los armónicos esféricos ante rotaciones se transforman de la forma

$$Y_l^m \xrightarrow{R} (Y_l^m)' = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(l)}(R) Y_l^{m'},$$

discuta por qué la sustitución $V_q^{(k)} = r^k Y_k^q(V_x, V_y, V_z)$ en los armónicos esféricos escritos en coordenadas cartesianas nos define un tensor esférico irreducible de rango k .

P8 Sean $V^{(k_1)}$ y $W^{(k_2)}$ dos tensores esféricos irreducibles de rango k_1 y k_2 , respectivamente.

(a) Muestre entonces que los operadores $T_q^{(k)}$, dados por

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1, q_2} V_{q_1}^{(k_1)} W_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | kq \rangle,$$

forman un tensor esférico irreducible de rango k . Para ello, estudie cómo transforma $T^{(k)}$ ante rotaciones.

(b) A partir de la expresión del inciso anterior, concluya que el producto $V_i W_j$ de las componentes de dos operadores vectoriales \mathbf{V} y \mathbf{W} se puede escribir como la suma de un escalar, otro vector y un tensor esférico de rango 2.

(c) Sean \mathbf{V} y \mathbf{W} dos operadores vectoriales. Construya, a partir de estos dos operadores y utilizando el inciso (a), tensores esféricos irreducibles de rango 0, rango 1 y rango 2 expresados en términos de los productos de las componentes V_i y W_j . En particular, si $\mathbf{V} = \mathbf{W} = \mathbf{R}$ es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador momento cuadrupolar eléctrico.

P9 Considere una partícula sin spin ligada a un centro fijo mediante de un potencial central. Estudie los elementos de matriz

$$\left\langle n', l', m' \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \right| n, l, m \right\rangle \quad \text{y} \quad \langle n', l', m' | z | n, l, m \rangle,$$

utilizando únicamente el teorema de Wigner-Eckart. En particular, trate de relacionar los distintos elementos de matriz entre sí y establezca cuáles de ellos pueden ser no nulos.

P10 El tensor cuadrupolar eléctrico de una partícula de carga q se define como

$$Q_{ik} \doteq q (3x_i x_k - \delta_{ik} r^2).$$

Suponga que se conoce el valor de expectación de la componente zz del momento cuadrupolar en el autoestado de momento angular $|\alpha, j, m = j\rangle$ (donde α es un índice asociado a la dependencia radial del estado; recordar que L^2 y L_z no forman un CCOC). Notemos con Q este valor de expectación, es decir que

$$Q \doteq \langle \alpha, j, m = j | Q_{zz} | \alpha, j, m = j \rangle = q \langle \alpha, j, m = j | (3z^2 - r^2) | \alpha, j, m = j \rangle.$$

(a) Calcule los elementos de matriz

$$q \langle \alpha, j, m' | (x^2 - y^2) | \alpha, j, m = j \rangle, \quad m' = j, j - 1, \dots, -j + 1, -j.$$

en función de Q y de los coeficientes de Clebsch-Gordan. Para ello,

- i. Escriba xy , xz , y $(x^2 - y^2)$ como componentes de un tensor esférico irreducible de rango 2.
 - ii. Evalúe los elementos de matriz buscados utilizando el teorema de Wigner-Eckart.
- (b) Evalúe los valores de expectación de todas las componentes del tensor cuadrupolar sobre los estados $|\alpha, j, m = j\rangle$, es decir calcule

$$\langle \alpha, j, m = j | Q_{ik} | \alpha, j, m = j \rangle,$$

en función del valor de expectación Q . Interprete el resultado.

- (c) Probar que para un núcleo atómico de spin 0 o 1/2 los valores de expectación del momento cuadrupolar eléctrico son nulos (el spin de un núcleo es el momento angular resultante de los spins y momentos angulares relativos de los nucleones constituyentes).

III. Otros Problemas

P11 Considere una partícula de masa m que está sometida a un potencial de oscilador armónico tridimensional isótropo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Definiendo los operadores de creación y destrucción usuales, pero para cada coordenada cartesiana,

$$a_k = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x_k + \frac{ip_k}{m\omega} \right), \quad a_k^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x_k - \frac{ip_k}{m\omega} \right),$$

(donde $k = x, y, z$) se puede mostrar que el Hamiltoniano se puede reescribir como

$$H = \hbar\omega \left(N_x + N_y + N_z + \frac{3}{2} \right),$$

con $N_i = a_i^\dagger a_i$ los operadores de número asociados a cada coordenada. Sin hacer cuentas, ¿puede argumentar por qué efectivamente el Hamiltoniano debe escribirse de esta forma?

Se suele además definir el operador de número total, $N = N_x + N_y + N_z$, de forma tal que

$$H = \hbar\omega(N + 3/2).$$

- (a) Verifique que los estados $|n_x\rangle \otimes |n_y\rangle \otimes |n_z\rangle$ (con $|n_i\rangle$ los autoestados del operador N_i) son autoestados del operador número total N y del Hamiltoniano. ¿Cuáles son los autovalores correspondientes? ¿Está degenerado el espectro de energías? ¿Cuál es el grado de degeneración?
- (b) Considere el operador de momento angular orbital $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Usando que el operador de momento en coordenadas esféricas escribe como

$$\mathbf{p}^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2,$$

concluya entonces que el Hamiltoniano conmuta con los operadores de momento angular orbital, $[L_i, H] = 0$. Expresando los operadores de posición y momento en término de los a y a^\dagger se puede mostrar que

$$L_j = \varepsilon_{jkl} x_k p_l = -i\hbar \varepsilon_{jkl} a_k^\dagger a_l$$

(haga alguno de los casos para verificar que esto es efectivamente cierto). Verifique entonces que el estado fundamental $|0\rangle$ es autoestado de momento angular total cero.

(c) Definimos los operadores

$$a_0^\dagger \doteq a_z^\dagger, \quad a_{\pm 1}^\dagger \doteq \mp \frac{a_x^\dagger \pm ia_y^\dagger}{\sqrt{2}}.$$

Usando estas definiciones se tiene que

$$L_z = \hbar (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-), \quad L_\pm = \hbar\sqrt{2} (a_\pm^\dagger a_0 + a_0^\dagger a_\mp).$$

(puede hacer alguno de los casos para verificar que esto es cierto). Es entonces sencillo (pero laborioso) mostrar que estos operadores satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [a_\pm, a_\pm^\dagger] &= \mathbb{I}, & [L_z, a_\pm^\dagger] &= \pm\hbar a_\pm^\dagger, & [L_z, a_0^\dagger] &= 0, \\ [L_+, a_+^\dagger] &= 0, & [L_+, a_0^\dagger] &= \hbar\sqrt{2} a_+^\dagger, & [L_+, a_-^\dagger] &= \hbar\sqrt{2} a_0^\dagger, \\ [L_-, a_-^\dagger] &= 0, & [L_-, a_0^\dagger] &= \hbar\sqrt{2} a_-^\dagger, & [L_-, a_+^\dagger] &= \hbar\sqrt{2} a_0^\dagger. \end{aligned}$$

- i. ¿Qué nos dicen estas relaciones de conmutación sobre los operadores a_q^\dagger ($q = 1, 0, -1$)?
 - ii. Mostrar usando estas reglas de conmutación que el estado $a_{\pm 1}^\dagger |0\rangle$ (con $|0\rangle$ el estado fundamental del oscilador) tienen momento angular total $l = 1$ y proyección $m_z = \pm\hbar$. Análogamente, muestre que $a_0^\dagger |0\rangle$ es autoestado de momento angular total $l = 1$ y proyección $m_z = 0$.
 - iii. Finalmente, definiendo los operadores $N_\pm = a_\pm^\dagger a_\pm$ y $N_0 = a_0^\dagger a_0$ se puede mostrar que $N = N_+ + N_- + N_0$ y por lo tanto $H = \hbar\omega(N_+ + N_- + N_0 + 3/2)$. Concluya entonces que los estados $a_\pm^\dagger |0\rangle$ y $a_0^\dagger |0\rangle$ son autoestados del operador de número total N con autovalor 1.
- (d) De lo encontrado en el inciso (b) concluya que $\{N, L^2, L_z\}$ conmutan entre sí. Sea $|N, l, m\rangle$ una base de autoestados común. En base a los resultados del inciso (c) concluya que entonces

$$|1, 1, 0\rangle = a_0^\dagger |0\rangle, \quad \text{y} \quad |1, 1, \pm 1\rangle = a_\pm^\dagger |0\rangle.$$

Escriba análogamente los estados $|2, l, m\rangle$. ¿Cuántos estados de esta forma hay? ¿Qué energía tienen? Utilizando este procedimiento vuelva a calcular la degeneración de los 4 primeros niveles de energía y compare con el resultado obtenido en (a).

Suponga ahora que además la partícula tiene spin 1/2 y que al potencial armónico se le añade un potencial de interacción spin-órbita $\gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$, donde \mathbf{L} es el momento angular orbital y \mathbf{S} el spin de la partícula. El Hamiltoniano total está dado entonces por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}.$$

- (e) Halle exactamente las energías y autoestados de H correspondientes al nivel fundamental y al primer excitado.
- (f) Si a $t = 0$ el sistema está en el estado $|\varphi\rangle = |N = 1, L_z = \hbar, S_z = \hbar/2\rangle$, halle el estado en función del tiempo, $|\varphi(t)\rangle$. Si a $t = 0$ se mide la energía, ¿qué resultado se obtiene? ¿Y si se mide L^2 o L_z ? ¿Qué ocurre si las mediciones se realizan a $t > 0$?
- (g) Repita el ítem anterior pero para el estado a $t = 0$ dado por $|\psi\rangle = |N = 1, L_z = -\hbar, S_z = \hbar/2\rangle$.

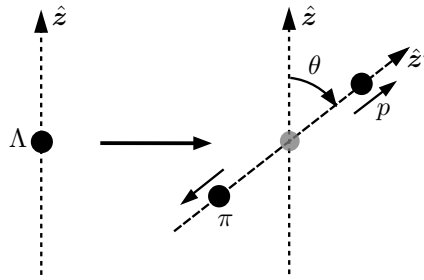
P12 La partícula Y se forma en la colisión $A + B \rightarrow Y$, y luego decae según la reacción $Y \rightarrow C + D$. Los spins de A, B, C y D son cero. En este ejercicio queremos estudiar qué restricciones impone a este proceso la conservación del impulso angular.

Elijamos como referencia el sistema centro de masa de AB . Llamemos \hat{z} a la dirección de los haces colisionantes (A y B) y \hat{z}' a un eje que forma un ángulo θ con \hat{z} . Denotemos con $|CD, z'\rangle$ al ket que describe las partículas C y D moviéndose como ondas planas en sentidos opuestos según la dirección \hat{z}' . Mostremos que conservación de \mathbf{J} permite predecir la distribución angular con la que es emitida C . Para ello, demuestre las siguientes afirmaciones.

- (a) El spin s de Y es necesariamente entero, e Y se produce en el estado $|s, 0\rangle$.
- (b) El ket $|s, 0\rangle_z$, un autoestado $\{J^2, J_z\}$ de Y , se puede desarrollar en la base $|s, m\rangle_{z'}$ de autoestados de $\{J^2, J_{z'}\}$ como $|s, 0\rangle_z = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle_{z'}$ con $c_m = d_{m0}^s(\theta)$.
- (c) El elemento de matriz $a = \langle CD, z'|U_T|s, 0\rangle_z$ es independiente de θ , la dirección de \hat{z}' .
- (d) La amplitud del proceso de decaimiento es $\langle CD, z'|U_T|s, 0\rangle_z = a d_{00}^s(\theta)$.

Dibuje a mano alzada la distribución θ de C . Note que el número de mínimos es justamente s . Así, la medición de la distribución angular de C permite inferir el valor del spin de Y . Note asimismo que, en el proceso $Y \rightarrow C + D$, el impulso angular de spin del Y (su impulso angular orbital es cero pues está en reposo) se transforma en impulso angular orbital del sistema CD . Así, lo que se conserva es el impulso angular total, no el orbital y el de spin por separado.

P13 La partícula lambda se desintegra en protón más pión, $\Lambda \rightarrow p \pi$, con un vida media de 10^{-12} seg. Los spins de la Λ , p , y π son $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y 0 , respectivamente. El decaimiento ocurre por la fuerza débil, pero en este ejercicio estudiaremos que restricciones impone conservación del impulso angular total (esto es, la suma de todos los impulsos angulares orbitales y de spin), independientemente de conocer el Hamiltoniano del proceso. Como se indica en la figura, tomamos como referencia el sistema en reposo de la Λ , elegimos como eje \hat{z} la dirección en que apunta su spin ($S_z(\Lambda) = \hbar/2$), llamamos \hat{z}' al eje en que se emite el protón, y denotamos con θ al ángulo entre \hat{z} y \hat{z}' .



- (a) Consideremos primero $\theta = 0$. ¿Cuánto vale en este caso L_z del protón y L_z del pión? Si se mide el spin del protón según \hat{z} , ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?
- (b) Repita el ítem anterior para el caso $\theta = \pi$.
- (c) Sea ahora θ arbitrario, y consideremos la medición del spin de la lambda según \hat{z}' . Usando matrices rotación calcule la probabilidad de medir $S_{z'} = \hbar/2$ o $S_{z'} = -\hbar/2$.
- (d) A partir del resultado del ítem anterior, muestre que la dependencia en θ de la probabilidad que la lambda emita un protón con $S_{z'} = \hbar/2$ es $P(\theta) \propto \cos^2 \frac{\theta}{2}$.
- (e) Repita el ítem anterior, pero calculando la distribución en θ para protones con $S_{z'} = -\hbar/2$.
- (f) Llamemos c_+ y c_- a las amplitudes del proceso cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, respectivamente (estas amplitudes se podrían calcular si conociéramos H). Muestre que conservación de paridad implica $|c_+| = |c_-|$. O sea, si $|c_+| \neq |c_-|$ el decaimiento de la Λ violaría paridad.
- (g) A partir de c_+ y c_- calcule la probabilidad de que el protón se emita a un ángulo θ , independientemente de su spin. Muestre que la emisión es isótropa si además de conservación de impulso angular se supone conservación de paridad.
- (h) Experimentalmente la probabilidad de que el protón salga formando un ángulo θ es

$$P(\theta) \propto 1 - 0.62 \cos \theta$$

A partir de esto muestre que $|c_-/c_+| \approx 2$.

Efectivamente, paridad no resulta ser una simetría de la naturaleza.