Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 8: Paridad

P1 Dado un operador *vectorial* (en el sentido de cómo transforma ante rotaciones; ver guía sobre Operadores Vectoriales y Tensores) $\boldsymbol{V}$ y sea π el operador de paridad, entonces decimos que el operador $\boldsymbol{V}$ es un

- *vector* si ante paridad se transforma de la forma $\pi \boldsymbol{V} \pi^\dagger = -\boldsymbol{V}$.
- *pseudo-vector* si ante paridad se transforma de la forma $\pi \boldsymbol{V} \pi^\dagger = \boldsymbol{V}$.

(a) Verifique que el operador $\boldsymbol{r}$ es un vector.

(b) Verifique que el operador $\boldsymbol{p}$ es un vector.

(c) Verifique que el operador $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ es un pseudo-vector.

P2 Dado un operador *escalar* (en el sentido de invariante ante rotaciones) K y sea π el operador de paridad, entonces decimos que el operador K es un

- *escalar* si ante paridad se transforma de la forma $\pi K \pi^\dagger = K$.
- *pseudo-escalar* si ante paridad se transforma de la forma $\pi K \pi^\dagger = -K$.

(a) Verifique que el operador $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}$ es escalar.

(b) Verifique que el operador $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{L}$ es pseudo-escalar.

P3 Sea $\mathcal{T}_{\boldsymbol{d}}$ el operador de traslación en un desplazamiento $\boldsymbol{d}$, $\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)$ el operador de rotación con $\hat{\boldsymbol{n}}$ y ϕ respectivamente el eje y el ángulo de la rotación, y π el operador de paridad. ¿Cuáles de los siguientes pares de operadores conmutan? ¿Por qué?

(a) $\mathcal{T}_{\boldsymbol{d}}$ y $\mathcal{T}_{\boldsymbol{d}'}$ ($\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{d}'$ en distintas direcciones).

(b) $\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)$ y $\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}', \phi')$ ($\hat{\boldsymbol{n}}$ y $\hat{\boldsymbol{n}}'$ en distintas direcciones).

(c) $\mathcal{T}_{\boldsymbol{d}}$ y π.

(d) $\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)$ y π.

P4 Considere dos autoestados del operador paridad

$$\pi |\alpha\rangle = \epsilon_\alpha |\alpha\rangle , \quad \pi |\beta\rangle = \epsilon_\beta |\beta\rangle ,$$

donde los autovalores ϵ_α y ϵ_β pueden ser 1 o -1. Sea además $\boldsymbol{V}$ un operador vectorial (en el sentido del problema **P1**), muestre entonces que

$$\langle \beta | \boldsymbol{V} | \alpha \rangle = 0,$$

salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^* \boldsymbol{r} \phi_\alpha \, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} = 0$ si ϕ_α y ϕ_β tienen la misma paridad.

Análogamente, muestre que si $\boldsymbol{V}$ es un pseudo-vector (en el sentido del probelma **P1**), entonces

$$\langle \beta | \boldsymbol{V} | \alpha \rangle = 0,$$

salvo si $\epsilon_\alpha = \epsilon_\beta$.

P5 Muestre que los operadores

$$P_+ = \frac{1+\pi}{2}, \quad y \quad P_- = \frac{1-\pi}{2},$$

son proyectores tales que $\pi P_+ |\psi\rangle = P_+ |\psi\rangle$, $\pi P_- |\psi\rangle = -P_- |\psi\rangle$, y $P_+ + P_- = 1$. ¿Qué significado físico tiene esto? ¿Qué condición debe cumplir $\psi(r)$ para que $|\psi\rangle$ pertenezca al subespacio invariante de P_+ o de P_- (es decir que $P_+ |\psi\rangle = |\psi\rangle$ o $P_- |\psi\rangle = |\psi\rangle$)?

P6 Considere una partícula sin spin en un potencial central $V(r)$, de forma tal que $|\alpha, l, m\rangle$ es una base de autoestados de $\{H, L^2, L_z\}$ y las funciones de onda asociadas son

$$\langle r, \theta, \phi|\alpha, l, m\rangle = R_\alpha(r) Y_l^m(\theta, \phi).$$

(a) Muestre que el operador paridad π conmuta con el Hamiltoniano del sistema $H = p^2/(2m) + V(r)$. ¿Qué nos dice esto sobre la relación entre los estados $|\alpha, l, m\rangle$ y el operador paridad?

(b) Usando las expresiones de los armónicos esféricos, muestre que frente a la transformación de paridad $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$, el estado se transforma como

$$\pi |\alpha, l, m\rangle = (-1)^l |\alpha, l, m\rangle .$$

Sugerencia: escriba cómo se transforman las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) en $\mathbb{R}^3$ ante una transformación de paridad y use el hecho que $Y_l^m(\theta, \phi) = C_l (-1)^m e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$, con $P_l^m(x)$ los polinomios asociados de Legendre, que satisfacen $P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x)$.

P7 Debido a interacciones débiles existentes entre los electrones atómicos y el núcleo, se puede tomar un potencial que viola paridad de la siguiente forma:

$$V = \lambda \left[\delta^3(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p}\, \delta^3(\boldsymbol{r}) \right],$$

donde $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{p}$ son los operadores de spin y de momento del electrón respectivamente, y se supone que el núcleo está ubicado en el origen de coordenadas. Como resultado, el estado fundamental de un átomo alcalino, usualmente caracterizado por $|n, l, j, m\rangle$, en realidad contiene pequeñas contribuciones provenientes de otros autoestados en la siguiente manera:

$$|n, l, j, m\rangle \to |n, l, j, m\rangle + \sum_{n'l'j'm'} C_{n'l'j'm'} |n', l', j', m'\rangle .$$

Usando solamente consideraciones de simetría, ¿qué puede decir acerca de los (n', l', j', m') que dan contribuciones no nulas?

P8 Sea una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico unidimensional cuyo estado inicial a $t = 0$ es el estado coherente

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle ,$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Se mide el operador paridad π a $t = 0$ obteniéndose el autovalor $+1$. ¿Cuál es el estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema a tiempo $t > 0$?

(b) Si a tiempo $t > 0$ se mide la energía, ¿qué resultados se pueden obtener y con qué probabilidad? ¿Qué resultados posibles daría en cambio la medición de π?

(c) Escriba $|\psi\rangle$ como combinación lineal de autoestados de a.

(d) Calcule $\langle\psi|a|\psi\rangle$ y $\langle\psi|a^\dagger|\psi\rangle$. ¿Es $|\psi\rangle$ un estado coherente?

Ayuda: los polinomios de Hermite satisfacen que $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

P9 Determine cuáles de los siguientes elementos de matriz entre autoestados del átomo de Hidrógeno se anula por argumentos de simetría.

(a) $\langle n = 2, l = 1, m = 0|p_z|n = 2, l = 1, m = 0\rangle$.

(b) $\langle n = 2, l = 1, m = 0|x|n = 2, l = 0, m = 0\rangle$.