Representación de interacción

Ecuación de Schrödinger en presencia de una "perturbación":

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}|\psi, t\rangle}{\mathrm{d}t} = (H_0 + V(t))\,|\psi, t\rangle$$

Transformamos kets y operadores via $U(t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}$:

$$|\psi', t\rangle = U(t)|\psi, t\rangle \qquad\qquad V'(t) = U(t)\,V(t)\,U^\dagger(t)$$

Evolución de kets:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\mathrm{d}|\psi', t\rangle}{\mathrm{d}t} &= i\hbar \frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}\,|\psi, t\rangle + U(t)\,i\hbar \frac{\mathrm{d}|\psi, t\rangle}{\mathrm{d}t} \\ &= -H_0\,U(t)\,|\psi, t\rangle + U(t)(H_0 + V(t))\,|\psi, t\rangle \\ &= U(t)\,V(t)\,|\psi, t\rangle = U(t)\,V(t)\,U^\dagger(t)\,U(t)\,|\psi, t\rangle \\ i\hbar \frac{\mathrm{d}|\psi', t\rangle}{\mathrm{d}t} &= V'(t)|\psi', t\rangle \end{aligned}$$

Evolución de operadores:

$$A'(t) = U(t)\,A(t)\,U^\dagger(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\,[A'(t), H_0] + \left[\frac{\partial A}{\partial t}\right]'$$

El operador evolución en la representación de interacción

Remplazando $|\psi', t\rangle = T'(t)\,|\psi', 0\rangle$ en $i\hbar\,\dfrac{\mathrm{d}|\psi', t\rangle}{\mathrm{d}t} = V'(t)|\psi', t\rangle$:

$$\boxed{i\hbar\,\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t} = V'(t)\,T'(t)} \qquad \longrightarrow \qquad T'(t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t V'(t_1)\,T'(t_1)\,\mathrm{d}t_1$$

Solución iterativa:

$$T'(t) = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^t \mathrm{d}t_1\, V'(t_1)\,T'(t_1)$$

$$T'(t) = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^t \mathrm{d}t_1\, V'(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\, V'(t_1)\,V'(t_2)\,T'(t_2)$$

$$T'(t) = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^t \mathrm{d}t_1\, V'(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\, V'(t_1)\,V'(t_2) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\int_0^{t_2}\mathrm{d}t_3\, V'(t_1)\,V'(t_2)\,V'(t_3)\,T'(t_3)$$

$$T'(t) = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^t \mathrm{d}t_1\, V'(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\, V'(t_1)\,V'(t_2) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\int_0^{t_2}\mathrm{d}t_3\, V'(t_1)\,V'(t_2)\,V'(t_3) + \cdots$$

Serie de Dyson: $T'(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(i\hbar)^n}\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\, V'(t_1)\,V'(t_2)\cdots V'(t_n)$

Transiciones a primer orden entre autoestados de H_0

$$P_{if}(t) = |\langle f\,|T'(t)|\,i\,\rangle|^2 \qquad \text{con} \qquad T'(t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t V'(t_1)\,\mathrm{d}t_1$$

$$\langle f\,|T'(t)|\,i\,\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle f\,|V'(t_1)|\,i\,\rangle\,\mathrm{d}t_1 = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle f\,|V(t_1)|\,i\,\rangle\,\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{fi}}t_1}\,\mathrm{d}t_1 \quad \text{con} \quad \omega_{\mathrm{fi}} \equiv \frac{E_f - E_i}{\hbar}$$

pues $\langle f\,|V'(t)|\,i\,\rangle = \langle f\,|\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}V(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}|\,i\,\rangle = \langle f\,|\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_f t}V(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}|\,i\,\rangle = \langle f\,|V(t)|\,i\,\rangle\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{fi}}t}$

$$P_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t \langle f\,|V(t')|\,i\,\rangle\,\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{fi}}t'}\,\mathrm{d}t'\right|^2$$

Perturbación sinusoidal

$$V(t) = V\cos\omega t = V\ \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{+i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t}\right)$$

$$P_{if}(t) = \frac{|\langle f\,|V|\,i\,\rangle|^2}{4\hbar^2}\left|\int_0^t \left(\mathrm{e}^{i(\omega_{\mathrm{fi}}+\omega)t'} + \mathrm{e}^{i(\omega_{\mathrm{fi}}-\omega)t'}\right)\mathrm{d}t'\right|^2$$

$$P_{if}(t) = \frac{|\langle f\,|V|\,i\,\rangle|^2}{4\hbar^2}\left|\frac{1-\mathrm{e}^{i(\omega_{\mathrm{fi}}+\omega)t}}{\omega_{\mathrm{fi}}+\omega} + \frac{1-\mathrm{e}^{i(\omega_{\mathrm{fi}}-\omega)t}}{\omega_{\mathrm{fi}}-\omega}\right|^2$$

Si $\omega = 0 \;\rightarrow\; V(t) = V \;\rightarrow\; P_{if}(t) = \frac{|\langle f\,|V|\,i\,\rangle|^2}{\hbar^2}\left|\frac{1-\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{fi}}t}}{\omega_{\mathrm{fi}}}\right|^2 = \frac{|\langle f\,|V|\,i\,\rangle|^2}{\hbar^2}\,F(t,\omega_{\mathrm{fi}})$

con $\quad F(t,\omega_{\mathrm{fi}}) \equiv \left|\frac{1-\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{fi}}t}}{\omega_{\mathrm{fi}}}\right|^2 = \left|\frac{\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{fi}}t/2}-\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathrm{fi}}t/2}}{2i\ \ \omega_{\mathrm{fi}}/2}\right|^2 = \left[\frac{\sin(\omega_{\mathrm{fi}}t/2)}{\omega_{\mathrm{fi}}/2}\right]^2$

$$P_{if}(t) = \frac{|\langle f\,|V|\,i\,\rangle|^2}{\hbar^2}\left[\frac{\sin(\omega_{\mathrm{fi}}t/2)}{\omega_{\mathrm{fi}}/2}\right]^2$$