El propagador de la ecuación de Schrödinger

Desarrollo de un $|\psi, t\rangle$ arbitrario en la base $\{|E\rangle\}$ de autoestados de H, $H|E\rangle = E|E\rangle$

$$|\psi, t\rangle = \sum_E |E\rangle\langle E|\psi, t\rangle \qquad \rightarrow \qquad |\psi, t'\rangle = \sum_E \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E(t'-t)}|E\rangle\langle E|\psi, t\rangle$$

Multiplicando por $\langle \boldsymbol{r}'|$, insertando $\hat{1} = \int |\boldsymbol{r}\rangle\langle\boldsymbol{r}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, y usando $\langle\boldsymbol{r}'|\psi, t'\rangle = \psi(\boldsymbol{r}', t')$:

$$\psi(\boldsymbol{r}', t') = \int \left[\sum_E \langle\boldsymbol{r}'|E\rangle\langle E|\boldsymbol{r}\rangle \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E(t'-t)}\right]\psi(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\psi(\boldsymbol{r}', t') = \int K(\boldsymbol{r}'t', \boldsymbol{r}\,t)\,\psi(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{con} \qquad \boxed{K(\boldsymbol{r}'t', \boldsymbol{r}\,t) \equiv \sum_E \langle\boldsymbol{r}'|E\rangle\langle E|\boldsymbol{r}\rangle\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E(t'-t)}}$$

La amplitud de encontrar el sistema en $(\boldsymbol{r}', t')$ es:

1. la amplitud la amplitud de encontrarlo en $(\boldsymbol{r}, t)$
2. por la amplitud que se “propague” de $(\boldsymbol{r}, t)$ a $(\boldsymbol{r}', t')$
3. integrado sobre todo $\boldsymbol{r}$.

El propagador en términos de la representación de Heisenberg

$$K(\boldsymbol{r}'t', \boldsymbol{r}\,t) = \sum_E \langle \boldsymbol{r}'|E\rangle\langle E|\boldsymbol{r}\rangle\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E(t'-t)}$$

$$= \sum_E \langle\, \boldsymbol{r}'|\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|E\rangle\langle E|\,\boldsymbol{r}\,\rangle$$

$$= \langle\, \boldsymbol{r}'|\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|\,\boldsymbol{r}\,\rangle$$

$$= \langle\, \boldsymbol{r}'|\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}H\,t'}\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}H\,t}|\,\boldsymbol{r}\,\rangle$$

$$\boxed{K(\boldsymbol{r}'t', \boldsymbol{r}\,t) = \langle\, \boldsymbol{r}'t'\,|\,\boldsymbol{r}\,t\,\rangle}$$

donde $|\,\boldsymbol{r}'t'\rangle$ es el autoestado de $\boldsymbol{R}^H(t')$, el operador posición en la representación de Heisenberg en el instante t': $\boldsymbol{R}^H(t')\,|\,\boldsymbol{r}'t'\rangle = \boldsymbol{r}'\,|\,\boldsymbol{r}'t'\rangle$

Interpretación del propagador como suma de caminos

Podemos descomponer el propagador en paso intermedios, utilizando la relación de completitud a t fijo, $\int |\, \boldsymbol{r}_i\, t_i\, \rangle \langle\, \boldsymbol{r}_i\, t_i\, |\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \hat{1}$, con $t_n > t_i > t_1$:

$$\langle\, \boldsymbol{r}_n\, t_n\, |\, \boldsymbol{r}_1\, t_1\, \rangle = \int \langle\, \boldsymbol{r}_n\, t_n |\, \boldsymbol{r}_i t_i \rangle \langle\, \boldsymbol{r}_i t_i | r_1 t_1 \rangle\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

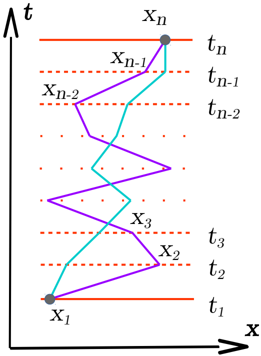
Dividiendo (t_1, t_n) en $n-1$ partes iguales,

$t_i - t_{i-1} = \dfrac{t_n - t_1}{n-1}$,

con $t_n > t_{n-1} > t_{n-2} > \cdots > t_3 > t_2 > t_1$:

$$\langle\, \boldsymbol{r}_n\, t_n\, |\, \boldsymbol{r}_1\, t_1 \rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{n-1} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{n-2} \cdots \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\, \langle\, \boldsymbol{r}_n\, t_n | \boldsymbol{r}_{n-1} t_{n-1} \rangle \times$$

$$\times \langle\, \boldsymbol{r}_{n-1} t_{n-1} | \boldsymbol{r}_{n-2} t_{n-2} \rangle \times \cdots \times \langle\, \boldsymbol{r}_3 t_3 | \boldsymbol{r}_2 t_2 \rangle \times \langle\, \boldsymbol{r}_2 t_2 | r_1 t_1 \rangle$$



El propagador es una suma sobre todos los caminos que van de $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ a $(\boldsymbol{r}_n, t_n)$.

La integral de camino en Mecánica Clásica

El principio de Hamilton establece que la dinámica de una partícula está gobernada por la acción S:

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)\, \mathrm{d}t$$

donde la integral depende del camino $\boldsymbol{r}(t)$, y $\mathscr{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$ es el lagrangiano.
Para una partícula en un potencial $V(\boldsymbol{r})$, $\mathscr{L} = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(\boldsymbol{r})$.

La trayectoria $\boldsymbol{r}(t)$ seguida para ir de $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ a $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ será aquella que hace estacionaria la acción, y satisface $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}(t_2) = \boldsymbol{r}_2$.

Cuantización à la Feynman

La acción clásica determina cuanto contribuye cada camino al propagador cuántico

$$\langle\, x_k\, t_k \,|\, x_{k-1} t_{k-1} \rangle \;\sim\; \mathrm{e}^{\,\frac{i}{\hbar}\, S(k,\,k-1)} \qquad \text{con} \qquad S(k,k-1) \equiv \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathscr{L}(x,\dot{x},t)\,\mathrm{d}t$$

Así, *producto* de las amplitudes corresponde a *suma* de las acciones

$$\langle\, x_n t_n \,|\, x_1 t_1 \rangle = \prod_{k=2}^{n} \langle\, x_k t_k \,|\, x_{k-1} t_{k-1} \rangle \sim \prod_{k=2}^{n} \exp\Big[\tfrac{i}{\hbar}\, S(k,k-1)\Big] = \exp\Big[\tfrac{i}{\hbar} \sum_{k=2}^{n} S(k,k-1)\Big] = \exp\big[\tfrac{i}{\hbar} S(n,1$$

El propagador se obtiene sumando sobre todos los caminos

$$\langle\, x_n t_n \,|\, x_1 t_1 \rangle \sim \sum_{\text{caminos}} \exp\Big[\tfrac{i}{\hbar}\, S(n,1)\Big]$$

La integral de camino de Feynman

Para que S determine la contribución de cada camino, tiene que ir en el exponente.

Por unidades, hay que dividir por una constante que tenga unidades de acción: $\hbar$

Su magnitud hay que medirla, determina la importancia relativa de caminos vecinos.

Para $\hbar \to 0$, sólo contribuyen las trayectorias vecinas a las clásicas.

Para hallar la constante de proporcionalidad C (que tiene unidades $[L]^{-1}$)

$$\langle\, x_k\, t_k \,|\, x_{k-1} t_{k-1} \rangle = C\, \exp\left[\, \frac{i}{\hbar}\, S(k, k-1) \right]$$

pedimos $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \langle\, x_k\, t_k \,|\, x_{k-1} t_{k-1} \rangle = \delta(x_k - x_{k-1})$ con $\Delta t = t_{k-1} - t_k$.

La integral de camino de Feynman

$$\lim_{\Delta t\to 0} S(k,k-1) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathscr{L}\,\mathrm{d}t = \Delta t\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}\right)^2 - V\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)\right] = \frac{m\,(x_k - x_{k-1})^2}{2\,\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\langle\, x_k\, t_k \,|\, x_{k-1} t_{k-1}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0} C\,\exp\left[\,\tfrac{i}{\hbar}\,S(k,k-1)\right] = C\lim_{\Delta t\to 0}\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\,\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{\Delta t}\right] =$$

$$= C\sqrt{i\pi\,\frac{2\hbar\Delta t}{m}}\;\delta(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{pues} \quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{i\pi\epsilon}}\,\exp\left[\frac{i\,x^2}{\epsilon}\right] = \delta(x)$$

Entonces $\lim_{\Delta t\to 0}\langle\, x_k\, t_k \,|\, x_{k-1} t_{k-1}\rangle = \delta(x_k - x_{k-1}) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}}$

La integral de camino de Feynman

$$\lim_{\Delta t\to 0}\langle\, x_k\, t_k\,|\, x_{k-1} t_{k-1}\rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\, \tfrac{i}{\hbar}\, S(k,k-1)\right]$$

$$\langle\, x_f\, t_f\,|\, x_i\, t_i\rangle = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int \mathrm{d}x_{n-1}\int \mathrm{d}x_{n-2}\,\cdots\int \mathrm{d}x_3\int \mathrm{d}x_2 \prod_{k=2}^{n} \exp\left[\, \tfrac{i}{\hbar}\, S(k,k-1)\right]$$

Definiendo $$\int_{x_i}^{x_f} \mathscr{D}[x(t)] \equiv \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int \mathrm{d}x_{n-1}\int \mathrm{d}x_{n-2}\,\cdots\int \mathrm{d}x_3\int \mathrm{d}x_2$$

$$\boxed{\langle\, x_f\, t_f\,|\, x_i\, t_i\,\rangle = \int_{x_i}^{x_f} \mathscr{D}[x(t)]\, \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} \mathscr{L}\,\mathrm{d}t\right]}$$

El efecto Bohm-Aharonov

En presencia de un campo $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, el Lagrangiano es

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\boldsymbol{r}} - V(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} = \mathscr{L}_{\mathrm{o}} + \frac{q}{c}\, \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}$$

Para un dado camino $\boldsymbol{r}(t)$ la acción es

$$S = \int_{\mathrm{o}}^{t} \mathscr{L}_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)\, \mathrm{d}t + \frac{q}{c} \int_{\mathrm{o}}^{t} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}t = S_{\mathrm{o}} + \frac{q}{c} \int_{\mathrm{o}}^{t} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

La integral sobre todos los caminos que van de la fuente al detector, se divide en dos: caminos que pasan por la rendija izquierda y por la derecha :

$$\langle\, x_f\, t_f \,|\, x_i\, t_i \,\rangle = \int \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\; \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S\right] = \int_I \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\; \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\mathrm{o}}\right]\; \exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c} \textstyle\int \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] + $$

$$+ \int_D \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\; \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\mathrm{o}}\right]\; \exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c} \textstyle\int \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right]$$

El efecto Bohm-Aharonov

La $\int_I \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sale fuera de $\int_I \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]$ pues es igual para todos los caminos I (idem $\int_D \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$)

$$\int_{i\,(C_1)}^{f} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{f\,(C_2)}^{i} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{i\,(C_1)}^{f} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{i\,(C_2)}^{f} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Entonces :

$$\langle\, x_f\, t_f \,|\, x_i\, t_i \,\rangle \;=\; \int \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\; \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S\right] \;=$$

$$\int_I \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\; \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_\mathrm{o}\right]\; \exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\int \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] \;+\; \int_D \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\; \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_\mathrm{o}\right]\; \exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\int \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] =$$

$$\exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\int_I \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right]\; \int_I \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\; \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_\mathrm{o}\right] \;+\; \exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\int_D \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right]\; \int_D \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\; \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_\mathrm{o}\right]$$

El efecto Bohm-Aharonov

La $\int_I \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sale fuera de $\int_I \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]$ pues es igual para todos los caminos I (idem $\int_D \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$)

$$\int_{i\,(C_1)}^{f} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{f\,(C_2)}^{i} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{i\,(C_1)}^{f} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{i\,(C_2)}^{f} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Entonces :

$$\langle\, x_f\, t_f \,|\, x_i\, t_i \,\rangle \;=\; \int \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\, \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S\right] \;=$$

$$\int_I \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\, \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\mathrm{o}}\right] \exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\textstyle\int \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] \;+\; \int_D \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\, \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\mathrm{o}}\right] \exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\textstyle\int \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] =$$

$$\exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\textstyle\int_I \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] \int_I \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\, \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\mathrm{o}}\right] \;+\; \exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\textstyle\int_D \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] \int_D \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\, \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\mathrm{o}}\right]$$

Tomando el módulo

$$\left|\langle\, x_f\, t_f \,|\, x_i\, t_i \,\rangle\right|^2 = \left|\int_I \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\, \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\mathrm{o}}\right]\right|^2 + \left|\int_D \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\, \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\mathrm{o}}\right]\right|^2 +$$

$$+\; 2\Re\left\{ \left[\textstyle\int_I \mathscr{D}\right] \left[\textstyle\int_D \mathscr{D}\right]^* \underbrace{\exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\textstyle\int_I \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \tfrac{iq}{\hbar c}\textstyle\int_D \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right]}_{\exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] = \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\,\Phi_B\right]} \right\}$$

El efecto Bohm-Aharonov

Por simetría

$$\int_I \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\ \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\rm o}\right] = \int_D \mathscr{D}[\boldsymbol{r}(t)]\ \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\, S_{\rm o}\right]\ \equiv\ J$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\langle\, x_f\, t_f \,|\, x_i\, t_i \,\rangle\right|^2 &= 2\,|J|^2 + 2\,\Re\left\{|J|^2 \exp\left[\tfrac{iq}{\hbar c}\,\Phi_B\right]\right\} \\
&= 2\,|J|^2\,\left(1 + \cos\tfrac{2\pi q}{\hbar c}\,\Phi_B\right) \\
&= 4\,|J|^2 && \text{para}\quad \Phi_B = 0 \\
&= \quad 0 && \text{para}\quad \Phi_B = \frac{\pi\hbar c}{q} \\
&= 4\,|J|^2 && \text{para}\quad \Phi_B = \frac{2\pi\hbar c}{q}
\end{aligned}$$

$$\frac{2\pi\hbar c}{e} = 4.13\times 10^{-7}\,\mathrm{G\,cm^2}$$

La fuerza de Coriolis en cuántica

El Lagrangaino de una partícula en un descrito desde un sistema rotante es

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}) = \tfrac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(\boldsymbol{r}) + m\,(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{2}m\left[\,r^2\Omega^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega})^2\right]$$

Remplazando en las ecuaciones de Lagrange $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\right) - \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{r}} = 0$

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{r}) - 2m\,\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} - m\,\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_{\text{cor}} + \boldsymbol{F}_{\text{centr}}$$

Coriolis agrega entonces un término a la acción:

$$S = S_{\mathsf{o}} + \int m\,(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\;\mathrm{d}t = S_{\mathsf{o}} + \int m\,(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

La fuerza de Coriolis en cuántica

Introduce una diferencia de fase entre caminos alternativos:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\hbar}\int_2 \mathscr{L}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\hbar}\int_1 \mathscr{L}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\hbar}\oint \mathscr{L}\,\mathrm{d}t = \frac{m}{\hbar}\oint (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \frac{m}{\hbar}\iint \left[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Un poco de Teórica 1 :

$$\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Omega}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Omega}) + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{r} \;=\; 3\,\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \;=\; 2\,\boldsymbol{\Omega}$$

La diferencia de fase introducida por Coriolis es :

$$\Delta\Phi = \frac{m}{\hbar}\iint 2\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{2m}{\hbar}\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{A}$$

Rotación en 4π del neutrón

El momento magnético de una partícula es proporcional a su espín: $\boldsymbol{\mu} = \gamma\, \boldsymbol{S}$

Para el neutrón $S_z = \frac{\hbar}{2}$:

$$\mu_n = \mu_z = \frac{\gamma\hbar}{2} = \frac{\gamma h}{4\pi} \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{4\pi\mu_n}{h}$$

El hamiltoniano en un $\boldsymbol{B} = B\,\hat{\boldsymbol{z}}$ es: $H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} = -\mu_z B = -\gamma B S_z$

La evolución temporal equivale a una rotación en z :

$$U_T(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\, t\, H\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\, t\gamma B\, S_z\right)$$

$$U_R(\hat{\boldsymbol{z}}, \Delta\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\, \Delta\theta\, S_z\right)$$

La evolución temporal en un tiempo t equivale a una rotación en

$$\Delta\theta = t\gamma B = t\,\frac{4\pi\mu_n}{h}\, B$$

Rotación en 4π del neutrón

Si el tiempo t corresponde a moverse con velocidad v en un campo magnético cuya extensión es ℓ :

$$t = \frac{\ell}{v} = \frac{m\ell}{mv} = \frac{m\ell}{p} = \frac{ml\lambda}{h}$$

la rotación es

$$\Delta\theta = \frac{ml\lambda}{h}\,\frac{4\pi\mu_n}{h}\,B$$

Una rotación $\Delta\theta$ cambia la fase del neutrón en $\beta = \frac{1}{2}\,\Delta\theta$:

$$\exp\left(\text{-}\tfrac{i}{\hbar}\Delta\theta\,S_z\right)|+\rangle \;=\; \exp\left(\text{-}\tfrac{i\Delta\theta}{2}\right)|+\rangle$$

$$\beta = \frac{\Delta\theta}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\beta = \frac{2\pi\mu_n\,B\ell\lambda m}{h^2}}$$