Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 9: Estados Mixtos y Matriz Densidad

P1 Para los siguientes sistemas de spin 1/2, escriba el operador densidad ρ y su representación matricial en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de autoestados de S_z.

(a) Un haz completamente polarizado con S_z+ (es decir en el autoestado $+\hbar/2$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$).

(b) Un haz completamente polarizado con S_x+ (es decir en el autoestado $+\hbar/2$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$).

(c) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente con 75% de S_z+ y 25% de S_z-.

(d) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente con 75% de S_z+ y 25% de S_x+.

(e) Un haz no polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente de S_x+ y S_x- en igual cantidad (50%).

Para cada uno de estos casos calcule los valores medios $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ y $\langle S_z\rangle$.

P2 Se fabrican dos haces parcialmente polarizados de partículas de spin 1, según las siguientes proporciones:

(a) 50% del autoestado $+\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, 50% del autoestado $-\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$.

(b) 50% del autoestado $+\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$, 50% del autoestado $-\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Muestre que ambos dan el mismo $\langle \boldsymbol{S}\rangle$, pero que las matrices densidad son distintas. Discuta cómo podría distinguirlos en un experimento.

P3 Considere un sistema de spin 1/2 cuyo estado se prepara generando un mezcla estadística con 75% de autoestados $+\hbar/2$ de S_z y 25% de autoestados $-\hbar/2$ de S_x.

(a) Escriba el operador densidad ρ del sistema y su representación matricial en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de autoestados de S_z.

(b) Diagonalice la matriz densidad para poder así reescribir el estado como $\rho = p_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, con $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ una base ortonormal.

(c) En vista de lo anterior, ¿es posible dar una interpretación no ambigua del estado mixto ρ como mezcla estadística de dos estados puros?

P4 **Pureza.** Sea ρ la matriz densidad que representa el estado de un sistema cuántico. Se llama *pureza* del estado ρ a la cantidad $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right)$.

(a) Mostrar que $\frac{1}{D} \leq \mathrm{tr}\left(\rho^2\right) \leq 1$, donde D es la dimensión del espacio de Hilbert.

(b) Muestre que si el estado es puro, entonces $\rho^2 = \rho$ y por lo tanto la pureza es máxima, $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = 1$. Muestre que vale también la vuelta, es decir que si la pureza es máxima, $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = 1$, entonces necesariamente ρ es un estado puro.

(c) Mostrar que para un estado mixto, $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) < 1$.

(d) Se llama *estado máximamente mixto* al estado $\rho = \frac{1}{D}\mathbb{I}$. Verifique que esta definición satisface todas las condiciones necesarias para ser un estado cuántico. Muestre que el estado máximamente mixto tiene pureza mínima, $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = 1/D$.

P5 Considere un sistema de spin 1/2. Para cada uno de los siguientes estados calcule la pureza, y los posibles resultados y sus respectivas probabilidades y valores medios al medir el spin en las tres direcciones cartesianas. Para el caso en que el estado es puro, encuentre el estado $|\psi\rangle$ tal que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

(a) $\rho = \frac{1}{2}\left(|+\rangle\langle+| + |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right)$,

(b) $\rho = \frac{1}{2}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right)$,

(c) $\rho = \frac{1}{3}|+\rangle\langle+| + \frac{\sqrt{2}}{3}|+\rangle\langle-| + \frac{\sqrt{2}}{3}|-\rangle\langle+| + \frac{2}{3}|-\rangle\langle-|$,

(d) $\rho = \frac{1}{3}|+\rangle\langle+| + \frac{2}{3}|-\rangle\langle-|$,

(e) $\rho = \frac{3}{8}|+\rangle\langle+| + \frac{\sqrt{2}}{3}|+\rangle\langle-| + \frac{\sqrt{2}}{3}|-\rangle\langle+| + \frac{5}{8}|-\rangle\langle-|$,

donde $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ son los autoestados de σ_z.

P6 **Evolución temporal.** La evolución temporal de la matriz densidad ρ en la representación de Schrödinger está dada por

$$\rho(t) = U(t,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0),$$

donde $U(t,t_0)$ es el operador de evolución temporal.

(a) Muestre que esta definición es consistente con la conocida para estados puros y discuta por qué la extensión al caso mixto tiene sentido en vista de la interpretación de ρ como mezcla estadística de estados.

(b) A partir de la ecuación diferencial que define al operador $U(t,t_0)$, encuentre la ecuación de evolución temporal para el operador densidad. Note las diferencias, tanto en la definición, como en la ecuación diferencial de evolución temporal, que hay entre la evolución temporal del operador ρ y la de un observable cualquiera en la representación de Heisenberg.

(c) Suponga que a $t = 0$ tiene un estado puro. Muestre que el estado no puede evolucionar a uno mixto si la evolución temporal está dada por una transformación unitaria (y por lo tanto si ρ satisface la ecuación de Schrödinger). En particular, muestre que la pureza de un estado permanece constante en el tiempo.

P7 **Esfera de Bloch.** Considere un sistema de spin 1/2.

(a) Muestre que la matriz densidad se puede siempre escribir en la forma

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right),$$

donde $\mathbb{I}$ es el operador identidad, y $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^3$. (Sugerencia: use los resultados ya mostrados en las guías anteriores; en particular use que el operador hermítico más general posible en dimensión 2 es de la forma $A = a_0\mathbb{I} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, con $a_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$).

(b) Calcule la pureza de ρ y encuentre cómo se relaciona con $\boldsymbol{P}$. En particular, ¿qué satisface $\boldsymbol{P}$ si el estado es puro? ¿y si es mixto? Relacione esto con la representación en la esfera de Bloch para estados de spin 1/2. (Ayuda: recordar las propiedades que satisfacen las matrices de Pauli; en particular que: $\operatorname{tr}\sigma_i = 0$, $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$, y $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\mathbb{I} + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{\sigma}$).

(c) Calcule $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$. ¿Cuál es la interpretación física de $\boldsymbol{P}$?

(d) En presencia de un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, el Hamiltoniano del sistema se puede escribir como $H = \hbar\omega S_z$ (ver problema de precesión del spin de la guía de Dinámica). Encuentre el $\boldsymbol{P}(t)$ que corresponde a la matriz densidad evolucionada $\rho(t)$. Interprete el resultado.

P8 Considere un sistema compuesto por dos partículas distinguibles de spin 1/2. Para cada uno de los dos siguientes estados, $|\Psi_{12}\rangle$ y $|\Phi_{12}\rangle$, dados por

$$|\Psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle\otimes|-\rangle - |-\rangle\otimes|+\rangle\right), \qquad |\Phi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle\otimes|-\rangle - |+\rangle\otimes|+\rangle\right),$$

(a) Determine si el estado del sistema compuesto es puro o mixto.

(b) Calcule la matriz densidad reducida para cada partícula. ¿Es el estado de cada subsistema puro o mixto?

(c) Determine si el estado del sistema compuesto es entrelazado.

(d) Proponga un observable (no totalmente degenerado) del sistema compuesto tal que su medición sobre el estado dado tenga un único resultado posible con certeza. ¿Puede hacer lo mismo para el estado de la partícula 1 considerando mediciones sólo sobre ese subsistema?

P9 Considere un sistema compuesto por tres partículas distinguibles con spin 1/2 y suponga que el estado está dado por la matriz densidad

$$\rho_{123} = \frac{1}{2}|+++\rangle\langle+++| + \frac{1}{6}|+++\rangle\langle++-| - \frac{1}{3}|+++\rangle\langle+-+| + \frac{1}{6}|++-\rangle\langle+++| \\ - \frac{1}{3}|+-+\rangle\langle+++| + \frac{1}{6}|++-\rangle\langle++-| + \frac{1}{3}|+-+\rangle\langle+-+|\,.$$

(a) Verifique que ρ_{123} es hermítica y que $\operatorname{tr}\rho_{123} = 1$.

(b) Calcule la pureza de ρ_{123} y determine si el estado es puro o mixto.

(c) Calcule el valor de expectación de la medición de S_x sobre la partícula 3. Realice este cálculo de dos formas diferentes: (i) calculando $\operatorname{tr}(\rho_{123}\,\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes S_x)$, y (ii) calculando la matriz densidad reducida del sistema 3, $\rho_3 = \operatorname{tr}_{12}(\rho_{123})$, y luego calculando $\operatorname{tr}(\rho_3\, S_x)$. Verifique que efectivamente ambos procedimientos dan el mismo resultado.

(d) Suponga ahora que en cambio se mide el observable $S_z\otimes S_x\otimes\mathbb{I}$. Calcule este valor medio nuevamente de dos formas diferentes, (i) directamente sobre ρ_{123} como $\operatorname{tr}(\rho_{123}\, S_z\otimes S_x\otimes\mathbb{I})$, y (ii) utilizando la matriz densidad reducida $\rho_{12} = \operatorname{tr}_3(\rho_{123})$.

P10 Considere un sistema compuesto por dos partículas distinguibles de spin 1 que se encuentran en el estado

$$\rho_{12} = \frac{1}{3}|++\rangle\langle++| - \frac{1}{3}|++\rangle\langle+-| - \frac{1}{3}|+-\rangle\langle++| + \frac{1}{3}|+-\rangle\langle+-| + \frac{1}{6}|0+\rangle\langle 0+| + \frac{1}{6}|+0\rangle\langle+0|\,,$$

done $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$ son los autoestados de S_z.

(a) Determine si el estado es puro o mixto.

(b) Si se mide el spin en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$ de la partícula 1, encuentre los resultados posibles, las respectivas probabilidades y el valor medio.

(c) Calcule el valor medio de la medición de spin en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$ de la partícula 2.

(d) Si se mide el observable $S_z\otimes S_z$, encuentre los resultados posibles, las respectivas probabilidades y el valor medio.

(e) Calcule el valor medio de la medición del observable $S_z\otimes S_x$.

P11 Considere un sistema compuesto por dos partículas distinguibles con spin 1/2. Inicialmente el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi_0\rangle = |+\rangle\otimes\frac{(|+\rangle + |-\rangle)}{\sqrt{2}},$$

donde $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ son los autoestados de σ_z. El sistema evoluciona según el Hamiltoniano $H = \hbar\omega\sigma_x\otimes\sigma_z$ durante un tiempo $T = \pi/(4\omega)$, de forma tal que la evolución temporal está dada por la transformación unitaria

$$U\left(T = \frac{\pi}{4\omega}\right) = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_x\otimes\sigma_z}.$$

(a) Calcule la matriz densidad reducida del primer spin y su respectiva pureza para el estado inicial. ¿El estado reducido es puro o mixto?

(b) Calcule el estado evolucionado, $|\psi(T)\rangle = U(T)\,|\psi_0\rangle$.

(c) Calcule la matriz densidad reducida del primer spin y su respectiva pureza para el estado final. ¿El estado reducido es puro o mixto?

(d) Si se mira la evolución temporal del primer spin por sí solo, ¿puede la evolución temporal corresponder a una transformación unitaria? ¿Por qué? ¿Vale la ecuación de Schrödinger para la matriz densidad del primer spin por sí solo?