Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2019

Guía 10: Información Cuántica, Desigualdades de Bell

I. Modelo de la medición de von Neumann

P1 En el siguiente problema estudiaremos una versión simplificada del modelo de proceso de medición propuesto por von Neumann, en el que no sólo tendremos en cuenta el sistema a medir sino que también al aparato de medición, que se trata como un sistema cuántico adicional. La idea consiste en tratar de codificar los distintos valores y probabilidades del observable A que se quiere medir en una base de estados del aparato de medición que sean fácilmente distinguibles. En el ejemplo a estudiar, consideraremos el aparato de medición como un sistema de variable continua y utilizaremos su grado de libertad de posición para codificar la información deseada. Por simplicidad supondremos además que el observable A a medir es no degenerado, de forma tal que

$$A = \sum_i a_i \, |a_i\rangle\langle a_i| \,, \quad a_i \neq a_j, \text{ si } i \neq j.$$

Denotaremos al sistema cuyo observable queremos medir como $\mathcal{S}$, mientras que el sistema del aparato de medición será $\mathcal{M}$, de forma tal que el sistema total estará representado por el espacio de Hilbert $\mathscr{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathscr{H}_{\mathcal{M}}$. Para realizar la medición se evoluciona al sistema compuesto según una transformación unitaria

$$U = e^{-i\lambda A \otimes p/\hbar}.$$

donde p es el operador momento en $\mathcal{M}$ y λ es una constante conocida.

(a) Proponga un Hamiltoniano H del sistema total $\mathscr{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathscr{H}_{\mathcal{M}}$ tal que esta evolución unitaria corresponde a la evolución temporal por un cierto tiempo T.

(b) Calcule la acción de la transformación U sobre el estado $|a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |x = x_0\rangle_{\mathcal{M}}$, donde $|x = x_0\rangle_{\mathcal{M}}$ es un autoestado de la posición de $\mathcal{M}$. ¿Cómo puede interpretar la acción de U? ¿Puede inferir el valor del autovalor a_i a partir de la posición de $\mathcal{M}$?

(c) Supongamos que el sistema auxiliar se encuentra inicialmente en un estado Gaussiano, $|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$, centrado en el origen y con varianza σ, es decir tal que

$$\langle x|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2}.$$

Calcule en tal caso $U\,|a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$. ¿Cómo puede interpretar la acción de U? ¿Cuál es la densidad de probabilidad en posición del sistema $\mathcal{M}$ luego de haber aplicado U? ¿Puede inferir el valor de a_i a partir de esta densidad de probabilidad?

(d) Suponga ahora que el estado inicial de $\mathcal{S}$ es un estado general $|\psi\rangle_{\mathcal{S}} = \sum_i c_i \, |a_i\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a_i si se mide A sobre $|\psi\rangle_{\mathcal{S}}$? Nuevamente el sistema auxiliar comienza en el mismo estado Gaussiano del ítem anterior, $|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$. Calcule el estado del sistema luego de la aplicación de U. ¿Cuál es la densidad de probabilidad de la posición de $\mathcal{M}$ luego de la acción de U? ¿Puede inferir los posibles valores de a_i y las probabilidades correspondientes? ¿Qué pasa en particular si se elige λ tal que $\lambda(a_{i+1} - a_i) \gg \sigma \; \forall i$?

(e) (*Opcional*) En el análisis anterior ignoramos los Hamiltonianos de cada sistema. En particular, si $\mathcal{M}$ representa el grado de libertad de posición de una partícula, deberíamos, por lo menos, considerar el Hamiltoniano de partícula libre $H_{\mathcal{M}} = p^2/(2m)$. A su vez, el sistema $\mathcal{S}$ puede tener un propio Hamiltoniano H_0, de forma tal que inicialmente tenemos $H = H_0 \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{M}} + \mathbb{I}_{\mathcal{S}} \otimes p^2/(2m)$. Para realizar la medición se enciende una interacción de la forma $H_{\text{int}} = g\, A \otimes p$ durante un tiempo T (con g una constante). Por simplicidad vamos a asumir que A conmuta con H_0. En tal caso, repita los ítems anteriores y discuta cómo cambian los resultados si se utiliza como transformación la evolución $U = e^{-iH_{\text{tot}}T/\hbar}$ con

$$H_{\text{tot}} = H_0 + \frac{p^2}{2m} + g\, A \otimes p.$$

P2 Vamos a reconsiderar el experimento de Stern-Gerlach, agregando el grado de libertad de posición de los átomos (que hasta ahora solo consideramos cualitativamente). En presencia de un campo magnético $\boldsymbol{B}$, un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ tiene una energía de interacción $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$. Para un spin tenemos que $\boldsymbol{\mu} = -|\mu|\boldsymbol{S}$ (con $\boldsymbol{S}$ el operador de spin y $|\mu|$ una constante que depende de las propiedades de la partícula, como su masa, carga y el factor-g). Si estamos en una región del espacio donde $\boldsymbol{B} = B(z)\hat{\boldsymbol{z}}$ y además el gradiente del campo es aproximadamente constante, es decir $\frac{\partial B}{\partial z} \approx$ cte, entonces el Hamiltoniano de interacción está dado por

$$H_{\text{int}} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} z \otimes \sigma_z .$$

En vista del problema anterior, ¿cómo puede interpretar el efecto de la evolución temporal generada por H_{int}? ¿Cómo puede interpretar esto en términos del experimento de Stern-Gerlach?

II. Información Cuántica

P3 **Teorema de no clonación.** El teorema de no clonación (Wootters, Zurek y Dieks, 1982) establece que resulta imposible construir una transformación unitaria cuya acción sea copiar el estado de un sistema a otro. Este resultado tiene profundas consecuencias en el área de la información cuántica. Formalmente, supongamos que tenemos dos sistemas A y B con un mismo espacio de Hilbert $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A = \mathscr{H}_B$. El objetivo es buscar alguna operación unitaria U sobre el espacio producto $\mathscr{H}_{AB} = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$, y un estado $|\alpha\rangle_B$ cualquiera (pero fijo) de B tales que, para todo estado $|\psi\rangle_A$ de A tenemos que

$$U\left(|\psi\rangle_A \otimes |\alpha\rangle_B\right) = e^{i\theta(\psi,\alpha)} |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B , \qquad \forall\, |\psi\rangle_A \in \mathscr{H},$$

es decir que, a menos de una fase global $\theta(\psi, \alpha)$, el efecto de U es copiar el estado de A al sistema B.

(a) Demostrar que esto es imposible. Para ello, asuma que vale para dos estados distintos $|\psi\rangle_A$ y $|\phi\rangle_A$ y calcule el producto interno $\left(\langle\phi|_A \otimes \langle\alpha|_B\right)\left(|\psi\rangle_A \otimes |\alpha\rangle_B\right)$ y utilice la unitariedad de U. Concluya entonces que la existencia de U es imposible que valga para cualquier par de estados $|\psi\rangle_A$ y $|\phi\rangle_A$. ¿Qué relación deben cumplir $|\psi\rangle_A$ y $|\phi\rangle_A$ para no llegar a una contradicción?

(b) A la luz de lo establecido por el teorema de no-clonación y considerando el postulado de medición, discuta lo siguiente: suponga que posee una *única* partícula en un estado desconocido, ¿podría realizar una (o más) mediciones y/o transformaciones unitarias con sistemas auxiliares de forma tal de determinar con certeza cuál era el estado del sistema?

P4 **Base producto y base de Bell.** Considere un sistema compuesto de dos partes, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2, y que denotados como $\mathscr{H}_A$ y $\mathscr{H}_B$. Sea $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ una base ortonormal de estados de A y $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ análogamente para B. Asimismo, sean σ_i^A y σ_i^B $(i = x, y, z)$ observables sobre cada uno de los subsistemas, cuyas representaciones matriciales en estas bases están dadas por las matrices de Pauli, de forma tal que $|0\rangle_A$ y $|1\rangle_A$ son autoestados de σ_z^A con autovalor $+1$ y -1, respectivamente (y análogamente para B).

(a) Considere el conjuntos de observables sobre el sistema compuesto: $\left\{\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B, \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B\right\}$. Muestre que forman conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

(b) Considere el conjuntos de observables sobre el sistema compuesto: $\left\{\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B, \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B\right\}$. Muestre que forman conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

P5 **Base de Bell.** Considere los siguientes estados de un sistema compuesto por dos subsistemas de dimensión 2 (donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ son los autoestados de σ_z con autovalor ±1, respectivamente):

$$\left|\Phi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right), \qquad \left|\Psi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right),$$

que conforman la comúnmente denominada *base de Bell*.

(a) Calcule las probabilidades de los posibles resultados de la medición de un observable cualquiera sobre el primer subsistema. Análogamente calcule las probabilidades para mediciones arbitrarias sobre el segundo subsistema.

(b) Para cada uno de los estados $|\Phi^\pm\rangle$ y $|\Psi^\pm\rangle$ calcule el valor medio de los observables $(\hat{\boldsymbol{n}}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) \otimes (\hat{\boldsymbol{n}}_B \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)$, donde $\hat{\boldsymbol{n}}_A$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_B$ son dos versores arbitrarios.

P6 **Teleportación cuántica de estados.** Supongamos que una persona, Alice, quiere transmitir el estado cuántico de una partícula a otra persona, Bob. Es más, Alice, en principio, no conoce cuál es el estado de la partícula. Por supuesto, una posibilidad sería que Alice le envíe a Bob el sistema físico que se encuentra en dicho estado. Sin embargo, en ciertos casos podría ser que Alice no quiera (o pueda) enviar la partícula que posee. Por el teorema de no clonación (ver problema **P3**), tampoco puede simplemente copiar el estado. A continuación presentamos un protocolo que le permite a Alice transmitir el estado sin enviar la partícula ni saber cuál es el estado.

El estado inicial, arbitrario y desconocido, que Alice quiere transmitir es

$$|\Psi\rangle_S = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,,$$

donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son los autoestados de σ_z con autovalor ±1, respectivamente. Denotamos además con $\mathscr{H}_S$ al espacio de Hilbert de dimensión 2 correspondiente a esta partícula.

Supongamos además que Alice y Bob poseen cada uno una partícula con un grado de libertad de dimensión 2 (cuyos espacios de Hilbert serán $\mathscr{H}_A$ y $\mathscr{H}_B$, respectivamente) y que inicialmente se encuentran en el estado entrelazado

$$\left|\Phi^+\right\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\right).$$

(a) Escriba el estado inicial del sistema total $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ en la base producto.

(b) Reescriba el estado inicial del sistema total pero ahora utilizando la base Bell (definida en el problema **P5**) para el estado del subsistema de las partículas que posee Alice, es decir para el estado del subespacio $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_A$.

(c) Suponga que Alice mide en la base de Bell sobre $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_A$. ¿Qué resultados puede obtener y con qué probabilidad? ¿Cual es el estado del sistema luego de la medición en cada caso? En particular, si el sistema queda proyectado sobre el estado $|\Phi^+\rangle_{SA}$, ¿cuál es el estado del sistema de Bob?

(d) Suponga que Alice le comunica a Bob cuál fue el resultado de la medición. Muestre que entonces en cada caso Bob puede aplicar una transformación unitaria adecuada a su subsistema para transformar el estado en el estado $|\Psi\rangle_B = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, que era justamente el estado que Alice quería transmitir.

(e) Repita el problema pero si ahora, en cambio, Alice y Bob comparten el estado entrelazado $|\Psi^-\rangle$. ¿Cómo cambian los resultados?

P7 **Codificación superdensa.** Supongamos que Alice y Bob poseen cada una una partícula con un grado de libertad de dimensión 2 y que además inicialmente se encuentran en el estado entrelazado

$$\left|\Phi^+\right\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right).$$

(a) Muestre que aplicando transformaciones unitarias apropiadas únicamente sobre su subsistema, Alice puede crear cualquiera de los otros tres estados de la base de Bell. (si los sistemas fuesen spins 1/2, ¿cómo se podrían generar estas transformaciones unitarias?).

(b) Suponga que Alice le envía su partícula a Bob, quién realiza una medición en la base de Bell. Discuta cómo de esta forma Alice puede enviar un mensaje con dos *bits* de información a Bob.

P8 **Medición en la base de Bell.** Considere un sistema compuesto por dos subsistemas de dimensión 2. Definimos las operaciones *Hadamard* (U_{H}) y *Control-NOT* (U_{CNOT}) como

$$U_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_z + \sigma_x\right) \otimes \mathbb{I}, \qquad U_{\mathrm{CNOT}} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x,$$

donde $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$ es la base de autoestados ±1, respectivamente, de σ_z.

(a) Muestre que las operaciones U_H y U_CNOT son unitarias.

(b) Muestre que la secuencia de operaciones $U_\mathrm{H}\,U_\mathrm{CNOT}$ genera el cambio de base de la base de Bell $\{|\Phi^\pm\rangle, |\Psi^\pm\rangle\}$ a la base producto $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

(c) Discuta cómo se puede utilizar esto para realizar una medición que distinga los estados de la base de Bell.

III. Desigualdades de Bell y Contextualidad

P9 **“Paradoja” EPR (versión Bohm ’51).** Considere un escenario en que dos personas Alice y Bob, en principio arbitrariamente lejos una de la otra, poseen cada una una partícula de spin 1/2. El sistema compuesto por ambas partículas se encuentra en el estado singlete

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A \otimes |-\rangle_B - |-\rangle_A \otimes |+\rangle_B\right),$$

con $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ la base de autoestados de S_z.

(a) Suponga que Alice mide su spin en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$; ¿cuáles son los posibles resultados y los respectivos estados después de la medición? Suponga que un instante después de la medición de Alice, Bob mide su partícula en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$; ¿qué resultados puede obtener y con qué probabilidad? Muestre que Alice tiene certeza del resultado de la medición que Bob realizará.

(b) Suponga que Alice mide su spin en la dirección $\hat{\boldsymbol{n}}$; ¿cuáles son los posibles resultados y los respectivos estados después de la medición? (Ayuda: en cambio de realizar los cálculos explícitamente, note que el estado singlete es invariante ante rotaciones). Suponga que un instante después de la medición de Alice, Bob mide su partícula en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$; ¿qué resultados puede obtener y con qué probabilidad? ¿Y si en cambio Bob mide en la dirección $\hat{\boldsymbol{n}}$? Muestre que en este segundo caso Alice tiene certeza del resultado de la medición que Bob realizará.

(c) Analice los argumentos EPR en el contexto de este experimento: ¿afecta de forma *instantánea* y *no-local* la decisión de Alice de en qué dirección medir el spin, el resultado de la medición de Bob? De no ser así, ¿debería entonces el spin de Bob tener su valor en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$ y $\hat{\boldsymbol{n}}$ bien definido de forma simultánea? ¿Es esta última afirmación compatible con la mecánica cuántica?

P10 **Desigualdad CHSH.** Considere un sistema compuesto de dos partículas de spin 1/2 y denotemos con las etiquetas A y B cada partícula. Consideremos además experimentos en que se mide sobre cada partícula el spin en alguna dirección del espacio y definamos la función de correlación $C(\hat{\boldsymbol{n}}_A, \hat{\boldsymbol{n}}_B)$, definida como el valor medio del producto de los resultados de las mediciones en las direcciones $\hat{\boldsymbol{n}}_A$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_B$ para cada partícula, es decir

$$C(\hat{\boldsymbol{n}}_A, \hat{\boldsymbol{n}}_B) = \langle(\hat{\boldsymbol{n}}_A \cdot \boldsymbol{\sigma})\,(\hat{\boldsymbol{n}}_B \cdot \boldsymbol{\sigma})\rangle = \sum_{a=1,-1}\sum_{b=1,-1} ab\, P\left(a, b \,|\, \hat{\boldsymbol{n}}_A, \hat{\boldsymbol{n}}_B\right),$$

donde a y b son los resultados de las mediciones de $(\hat{\boldsymbol{n}}_A\cdot\boldsymbol{\sigma})$ y $(\hat{\boldsymbol{n}}_B\cdot\boldsymbol{\sigma})$, respectivamente, y $P\left(a, b \,|\, \hat{\boldsymbol{n}}_A, \hat{\boldsymbol{n}}_B\right)$ su respectiva probabilidad.

Suponiendo localidad y realismo (à la EPR), Clauser, Horne, Shimony y Holt (Phys. Rev. Lett., 23 (15), 1969) mostraron que

$$|C(\hat{\boldsymbol{n}}_A, \hat{\boldsymbol{n}}_B) - C(\hat{\boldsymbol{n}}_A, \hat{\boldsymbol{n}}'_B) + C(\hat{\boldsymbol{n}}'_A, \hat{\boldsymbol{n}}_B) + C(\hat{\boldsymbol{n}}'_A, \hat{\boldsymbol{n}}'_B)| \le 2,$$

para cualquier elección de $\hat{\boldsymbol{n}}_A$, $\hat{\boldsymbol{n}}'_A$, $\hat{\boldsymbol{n}}_B$, $\hat{\boldsymbol{n}}'_B$.

(a) Considere que el sistema se encuentra en un estado producto, $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$. Muestre entonces que la cota CHSH se satisface para cualquier elección de $\hat{\boldsymbol{n}}_A$, $\hat{\boldsymbol{n}}'_A$, $\hat{\boldsymbol{n}}_B$, $\hat{\boldsymbol{n}}'_B$.

(b) Considere que el sistema se encuentra en el estado singlete $|\psi_{AB}\rangle = (|+-\rangle - |-+\rangle)/\sqrt{2}$ y tome $\hat{\boldsymbol{n}}_A = \hat{\boldsymbol{z}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}'_A = \hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}_B = -(\hat{\boldsymbol{z}}+\hat{\boldsymbol{x}})/\sqrt{2}$ y $\hat{\boldsymbol{n}}'_B = (\hat{\boldsymbol{z}}-\hat{\boldsymbol{x}})/\sqrt{2}$. Muestre entonces que la cota CHSH se viola, obteniendo en particular el valor $2\sqrt{2}$. (Sugerencia: use el resultado mostrado en el problema **P5** que en el estado singlete $\langle(\hat{\boldsymbol{n}}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}) \otimes (\hat{\boldsymbol{n}}_B \cdot \boldsymbol{\sigma})\rangle = -\hat{\boldsymbol{n}}_A \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_B$).

P11 **Correlaciones non-signaling.** En el siguiente problema exploraremos por qué las correlaciones cuánticas, no obstante ser no locales (en el sentido EPR), no permiten transmitir información. Consideremos un experimento tipo el del problema CHSH, donde tenemos dos partes, Alice y Bob, cada una con una partícula y que deciden realizar mediciones de algún observable. En cada ronda del experimento, Alice decide qué observable medir (en el caso CHSH decide si medir el spin en la dirección $\hat{\boldsymbol{n}}_A$ o $\hat{\boldsymbol{n}}'_A$) y obtiene un resultado a (± 1 para CHSH). Análogamente Bob también decide qué observable medir (dirección $\hat{\boldsymbol{n}}_B$ o $\hat{\boldsymbol{n}}'_B$) y obtiene el resultado b. Etiquetamos con $x \in \{0, 1\}$ la elección de Alice ($x = 0$ corresponde a medir en la dirección $\hat{\boldsymbol{n}}_A$ y $x = 1$ a $\hat{\boldsymbol{n}}'_A$). Análogamente, con $y \in \{0, 1\}$ etiquetamos la elección de Bob. De esta forma, repitiendo el experimento en muchas rondas y después juntando los resultados, Alice y Bob pueden reconstruir la distribución de probabilidades $P\,(a, b\,|\,x, y)$. Se dice que una distribución de probabilidades de este tipo es *non-signaling* si satisface que

$$\sum_b P\,(a, b\,|\,x, y) = P\,(a\,|\,x)\,, \qquad \sum_a P\,(a, b\,|\,x, y) = P\,(b\,|\,y)\,.$$

(a) Discuta por qué efectivamente la condición *non-signaling* significa que Alice y Bob no pueden utilizar el experimento para mandarse información.

(b) Note que toda distribución de probabilidades generada por la mecánica cuántica es tal que

$$P\,(a, b\,|\,x, y) = \mathrm{tr}\left[\rho_{AB}\,\Pi^A_{a|x} \otimes \Pi^B_{b|y}\right],$$

donde ρ_{AB} es una matriz densidad, y $\Pi^K_{n|z}$ es el proyector asociado al resultado n de la medición en el subsistema K del observable correspondiente a la etiqueta z. Muestre entonces que la mecánica cuántica satisface el principio de *non-signaling.*

P12 **Contextualidad: Cuadrado de Mermin-Peres.** Considere dos observables O y O' que conmutan. Esto significa que los observables son compatibles y por lo tanto a la medición de ambos observables le podemos asociar una combinación posible de resultados (λ, λ'). Notar que el producto de estos operadores $O'' = OO'$ es un nuevo observable que además conmuta con O y O' y por lo tanto también se pude medir simultáneamente. Midiendo estos tres observables en conjunto, obtenemos los resultados $(\lambda, \lambda', \lambda'')$. El hecho que $O'' = OO'$ implica que $\lambda'' = \lambda\lambda'$. Supongamos que existe un teoría más completa que la mecánica cuántica (*teoría de variables ocultas*) que permite darle un valor determinista al resultado de una medición, que denotamos $\lambda(O)$. Se dice que la teoría satisface el principio de *consistencia funcional* si para todo par de observables O y O' que conmutan, los resultados de las mediciones satisfacen que $\lambda(OO') = \lambda(O)\lambda(O')$. Vamos a mostrar que una teoría que satisface esto más una otra hipótesis muy razonable, produce resultados incompatibles con la cuántica. Para ello, consideremos los 9 observables de un sistema de dos spin 1/2 que se muestran a continuación.

$\sigma_x \otimes \mathbb{I}$	$\mathbb{I} \otimes \sigma_x$	$\sigma_x \otimes \sigma_x$
$\mathbb{I} \otimes \sigma_z$	$\sigma_z \otimes \mathbb{I}$	$\sigma_z \otimes \sigma_z$
$\sigma_x \otimes \sigma_z$	$\sigma_z \otimes \sigma_x$	$\sigma_y \otimes \sigma_y$

(a) Muestre que los tres observables sobre cualquier fila o columna conmutan entre sí. (Ayuda: recuerde que $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$, que las matrices de Pauli distintas anticonmutan, $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$, y que $\sigma_y = i\sigma_z\sigma_x$).

(b) Muestre que todos los operadores tienen autovalores ± 1.

(c) Muestre que el último elemento de cada fila o columna es igual al producto de los primeros dos, salvo para la última columna donde $\sigma_y \otimes \sigma_y = -(\sigma_x \otimes \sigma_x)(\sigma_z \otimes \sigma_z)$.

(d) Si existe una teoría que le asigna valores deterministas a observables compatibles, entonces debe asignar valores a, b (que valen ± 1) a los observables $\sigma_x \otimes \mathbb{I}$, $\mathbb{I} \otimes \sigma_x$. Análogamente, debería asignarle valores a', c a los observables $\sigma_x \otimes \mathbb{I}$, $\mathbb{I} \otimes \sigma_z$. Notemos que $\sigma_x \otimes \mathbb{I}$ tiene asignado dos valores dependiendo del otro observable junto al cual se mide. Decimos que una teoría es *no-contextual* si $a' = a$ (el resultado no depende del contexto). Así tenemos valores a, b, c, d (que valen ± 1) para a los observables $\sigma_x \otimes \mathbb{I}$, $\mathbb{I} \otimes \sigma_x$, $\mathbb{I} \otimes \sigma_z$, $\sigma_z \otimes \mathbb{I}$. Usando la hipótesis de consistencia funcional, $\lambda(OO') = \lambda(O)\lambda(O')$ para observables O y O' compatibles, complete las filas y columnas de la tabla anterior con los valores que deben tener las restantes mediciones. De esta forma vea que se llega a una contradicción al tratar de asignarle un valor al observable $\sigma_y \otimes \sigma_y$. Esto es un ejemplo de que la hipótesis de no-contextualidad es fundamentalmente incompatible con lo que predice la mecánica cuántica (se dice por lo tanto que la mecánica cuántica es una teoría *contextual*).