

---

“Quantum theory does not trouble me at all. It is just the way the world works.” - J. Wheeler.

---

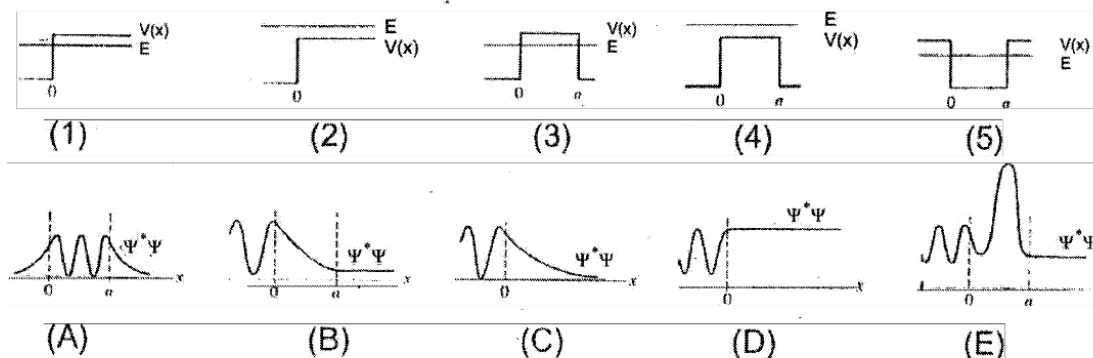
## Órdenes de magnitud

### 1 Multiple choice

- (a) El radio medio típico de un átomo es
- A.  $10^{-5}$  m.
  - B.  $10^{-10}$  m.
  - C.  $10^{-20}$  m.
  - D.  $10^{-30}$  m.
- (b) Comparado con la longitud de onda de Compton del electrón, el radio de Bohr es
- A. 100 veces más grande.
  - B. 10000 veces más chico.
  - C. aproximadamente igual.
- (c) El número de fotones por segundo emitido por una lamparita es del orden de
- A.  $10^3$ .
  - B.  $10^5$ .
  - C.  $10^{10}$ .
  - D.  $10^{20}$ .
- (d) La energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno es del orden de
- A.  $10^{-6}$  eV.
  - B.  $10^{-3}$  eV.
  - C. 10 eV.
  - D. 10 MeV.
- (e) La velocidad promedio de un electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno es aproximadamente
- A.  $c$ .
  - B.  $0,1 c$ .
  - C.  $10^{-2} c$ .
  - D.  $10^{-5} c$ .
  - E.  $10^{-10} c$ .
- (f) El tiempo de vida medio típico de un estado electrónico excitado de un átomo es
- A.  $10^2$  s.
  - B.  $10^{-8}$  s.
  - C.  $10^{-18}$  s.
  - D.  $10^{-38}$  s.

## Problemas unidimensionales

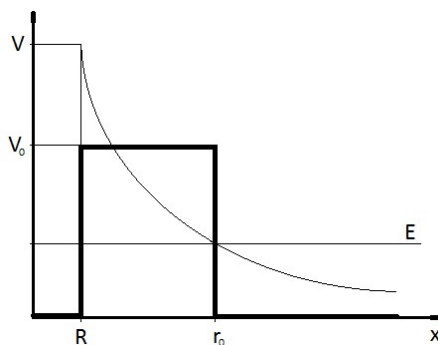
- 2 Hallar la distribución de impulsos correspondiente a la función de onda  $\psi(x) = A e^{-|x|/a} e^{ikx}$ , con  $a > 0$ . Calcular  $\Delta x$ ,  $\Delta p$  y verificar la relación de incerteza.
- 3 Los diagramas (1)-(5) de la figura representan distintos tipos de potenciales unidimensionales en los que se encuentra una partícula con un determinado valor de energía  $E$ . Indicar qué gráfica de  $\Psi^* \Psi$  corresponde a cada uno de los casos (1)-(5).



- 4 Demuestre que un potencial atractivo sumamente angosto y profundo representado por una delta de Dirac,  $V(x) = \lambda \delta(x)$ , contiene un solo estado ligado y calcule el autovalor correspondiente de la energía. (Ayuda: Integrar la ecuación de Schrodinger entre  $-\epsilon$  y  $\epsilon$  y mostrar que  $\psi'(x)$  es discontinua en  $x = 0$ ).
- 5 \* **Vida media del Bismuto**

El isótopo radiactivo  ${}_{83}\text{Bi}^{212}$  decae a  ${}_{81}\text{Tl}^{208}$  emitiendo una partícula  $\alpha$  de energía  $E = 6,0$  MeV. En este problema, estimaremos la vida media de este isótopo del Bismuto.

Para ello, consideraremos que el  ${}_{83}\text{Bi}^{212}$  está formado por una partícula  $\alpha$  ( $\text{He}^{2+}$ ) y un núcleo de  ${}_{81}\text{Tl}^{208}$ . El decaimiento se dará cuando la partícula  $\alpha$  “atraviese” el potencial electrostático efectivo al que se encuentra sometida por la presencia del  ${}_{81}\text{Tl}^{208}$ .



- (a) El primer paso consiste en realizar una aproximación del potencial electrostático por una barrera cuadrada unidimensional (ver figura). Calcule valores apropiados para los parámetros de la barrera ( $r_0$ ,  $V_0$  y  $V$ ), teniendo en cuenta que el radio del Talio es  $R = 6 \times 10^{-13}$  cm.
- (b) Obtenga una expresión para el coeficiente de transmisión  $T$  de una barrera de potencial cuadrada.

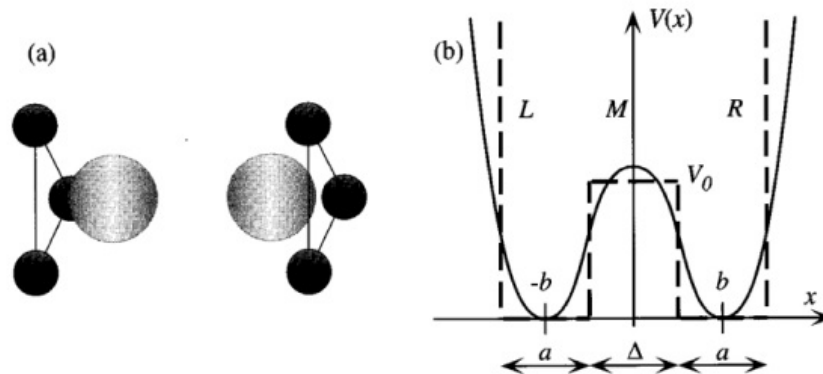
(c) Demuestre que una estimación para la vida media viene dada por

$$\tau \approx \frac{2R}{vT} \quad (1)$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula  $\alpha$  ( $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ ). Calcule la vida media y compare con el valor experimental  $\tau = 1$  h.

### 6 \* Inversión del Nitrógeno

La molécula de amoníaco ( $NH_3$ ) tiene forma de pirámide, donde los átomos de  $H$  forman una base triangular y el átomo de  $N$  se encuentra en la cúspide. Existe un proceso conocido como “inversión del Nitrógeno” en el que la pirámide se invierte tal como se muestra en la figura (a). Un modelo muy simple para este fenómeno considera un potencial unidimensional  $V(x)$ , donde  $x$  es la posición de una partícula ficticia de masa  $M = 3m_H$ , que simula el movimiento rígido de la base de la pirámide. La línea continua de la figura (b) corresponde a  $V(x)$ , siendo el origen la posición del átomo de  $N$ , que se supone estático. Simplificaremos aún más el potencial, utilizando un pozo de paredes impenetrables de ancho  $2a + \Delta$  en cuyo centro se encuentra una barrera de altura  $V_0$  y ancho  $\Delta$  (línea punteada). Para el caso del amoníaco, se tiene  $a = 0,3\text{\AA}$ ,  $\Delta = 0,3\text{\AA}$  y  $V_0 = 0,25\text{eV}$ . Analizaremos los estados con  $E < V_0$ .



- (a) Teniendo en cuenta la simetría de  $V(x)$  y las condiciones de contorno, grafique las funciones de onda  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$ , correspondientes a los dos autoestados de menor energía, suponiendo que en ambos casos  $E < V_0$ . Encuentre  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$ , a menos de la constante de normalización.
- (b) Mostrar que la energía se obtiene de las siguientes expresiones:  $\tan(ka) = -\frac{k}{q} \coth(q\Delta/2)$  para el estado fundamental y  $\tan(ka) = -\frac{k}{q} \tanh(q\Delta/2)$  para el primer estado excitado (donde  $k = \sqrt{2ME}/\hbar$  y  $q = \sqrt{2M(V_0 - E)}/\hbar$ ).
- (c) Aproximar las expresiones del punto anterior para el caso en que  $E \ll V_0$  y que  $q\Delta \gg 1$  y obtener las energías de ambos autoestados ( $q \approx \sqrt{2MV_0}/\hbar$ ). En particular, mostrar que la diferencia de energía entre ambos niveles es

$$E_2 - E_1 \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2Ma^2} \frac{4e^{-q\Delta}}{qa}$$

Calcular esta cantidad y comparar con el valor experimental  $E_2 - E_1 = 9,84 \times 10^{-5} \text{eV}$

- (d) Suponer que a  $t = 0$  la probabilidad de encontrar a la partícula ficticia está concentrada en el lado izquierdo del pozo. Encontrar una función de onda combinación lineal de  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que describa esta situación. Calcular a qué tiempo  $T$  la máxima probabilidad de encontrar a la partícula está del lado derecho del pozo y determinar la frecuencia de inversión.

7 Considerar una partícula de masa  $m$  en un potencial de oscilador armónico  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ .

- (a) Demostrar que las funciones

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-x^2/(2x_0^2)}, \quad \psi_1(x) = A_1 x e^{-x^2/(2x_0^2)} \quad \text{y} \quad \psi_2(x) = A_2 \left[ 2 \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 - 1 \right] e^{-x^2/(2x_0^2)},$$

con  $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ , son soluciones de la ecuación de Schrodinger estacionaria con energías  $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ ,  $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$  y  $E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$ , respectivamente. Graficar esquemáticamente la densidad de probabilidad para cada función y hallar  $A_0$ ,  $A_1$  y  $A_2$  para que las funciones de onda estén normalizadas.

- (b) Verificar que  $\psi_0(x)$  satura la relación de incerteza.  
(c) La ecuación de Schrodinger estacionaria para este potencial puede resolverse explícitamente y se obtiene un conjunto discreto de autoestados que tienen la forma

$$\psi_n(x) = A_n \left( \frac{x}{x_0} - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/(2x_0^2)},$$

y cuyas energías son  $E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$ . Recordar la resolución de dicha ecuación (puede consultar por ejemplo la sección 2 del complemento  $C_V$  del tomo I del libro de Cohen, p. 537). *Más adelante en el curso veremos otro método más sencillo y elegante para obtener el espectro del oscilador armónico.*

8 Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

- (a) Una partícula libre se encuentra en el estado  $\psi(x) = A \cos(kx) + A \sin(2kx)$  ( $A$ ,  $k$  son constantes reales). Entonces, si se mide el momento lineal de la partícula sólo se podrán obtener (con probabilidad no nula) los valores  $p = \pm\hbar k$  y  $p = \pm 2\hbar k$ .  
(b) En problemas unidimensionales, el espectro de estados ligados es siempre no degenerado.  
(c) Si  $V(x)$  es un potencial unidimensional par, entonces los autoestados de energía tienen paridad definida (es decir, o son pares o son impares).