"As far as laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality." - Albert Einstein.

Espacios de Hilbert de dimensión finita

$\boxed{1}$ (a) Pruebe las siguientes identidades para operadores A, B, C, D en cierto espacio de Hilbert, con $[A, B] := AB - BA$ y $\{A, B\} := AB + BA$.

$$\begin{aligned} 0 &= [A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] \quad \text{(identidad de Jacobi)}\,; \\ [A, B+C] &= [A,B] + [A,C]\,; \\ [A, BC] &= [A,B]C + B[A,C]\,; \\ [A,B] &= \{A,B\} - 2BA\,; \\ [A,BC] &= \{A,B\}C - B\{A,C\}\,. \end{aligned}$$

(b) Suponga que B es tal que conmuta con el conmutador $[A, B]$. Verifique entonces que $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$. Utilizar esta propiedad para demostrar que si f es una función analítica, entonces resulta $[f(A), B] = f'(A)[A, B]$.

(c) Dado un operador A, se define formalmente la exponencial de A como

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\,.$$

Compruebe que $e^{\lambda A}$ es la solución a la ecuación diferencial $h'(\lambda) = Ah(\lambda)$. Además, que si A y B conmutan con $[A, B]$, entonces

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2}\,.$$

Esta es una de las relaciones que se desprenden de la fórmula de Baker-Campbell-Haussdorf. Ayuda: considere la función[1] $g(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{-\lambda(A+B)}$, demuestre que la misma satisface la ecuación diferencial $\frac{dg}{d\lambda} = \lambda[A, B]g$ y posteriormente resuelva dicha ecuación diferencial.

Importante: Notar que $e^A e^B \neq e^{A+B}$

$\boxed{2}$ Suponga que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ son dos bases ortonormales de cierto espacio de Hilbert con producto interno $\langle|\rangle$.

(a) Considere $|u\rangle = |\alpha\rangle - i\,|\beta\rangle$ y $|v\rangle = i\,|\alpha\rangle + |\beta\rangle$. ¿Cuánto vale $\langle u|v\rangle$? ¿Son estos vectores ortogonales?

(b) Escriba $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y calcule nuevamente $\langle u|v\rangle$.

$\boxed{3}$ Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) La traza de un operador depende de la base en la que se escribe el mismo.

(b) $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, donde X e Y son operadores.

(c) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

(d) Si A es un operador hermítico con desarrollo espectral $A = \sum_i a_i\,|i\rangle\,\langle i|$ y f una función analítica, entonces $f(A) = \sum_i f(a_i)\,|i\rangle\,\langle i|$.

---

[1] Esta es una función que toma un número real y lo manda a un operador, es decir, es una función con valores en operadores. Su imagen se puede pensar como una curva en el espacio de operadores.

(e) $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de cierto operador hermítico A. Entonces, $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A.

(f) Si dos observables A y B tienen los mismos autovectores $\{|i\rangle\}$ y el conjunto $\{|i\rangle\}$ es una base ortonormal completa del espacio de Hilbert, entonces $[A, B] = 0$.

(g) Si dos operadores hermíticos anticonmutan, entonces es posible hallar un autoestado común a ambos operadores.

4 En un espacio vectorial V de dimensión 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de V, con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli.*

(a) ¿Son estas matrices hermíticas? Hallar sus autovalores y autovectores en esta base.

(b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \det(\sigma_k) &= -1; \\ \mathrm{Tr}(\sigma_k) &= 0; \\ \sigma_i^2 &= I; \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k; \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}I; \\ \sigma_j\sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk}; \end{aligned}$$

donde I representa a la matriz identidad, $k = 1, 2, 3$ ($\equiv x, y, z$), ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita, y δ_{ij} es la delta de Kronecker. En la última identidad se utiliza la notación de suma sobre índices repetidos.

5 Considere una matriz X de 2×2 que se escribe en la forma

$$X = a_0 I + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$$

donde a_0 y $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ son números, y $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

(a) ¿Cómo se relacionan los a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) con $\mathrm{Tr}(X)$ y $\mathrm{Tr}\,(\sigma_k X)$?

(b) Obtenga a_0 y a_k en término de los elementos de matriz X_{ij}. Muestre que cualquier matriz X hermítica de 2×2 se puede escribir en esta forma.

6 Para un sistema de dimensión 2 se define el operador de espín $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$, con $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$ ($j = x, y, z$), donde σ_j son las matrices de Pauli.

(a) Probar que $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$.

(b) Demostrar que, en la base de autovectores de S_z $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ (correspondientes a los autovalores $\hbar/2$ y $-\hbar/2$, respectivamente), la representación de las componentes del operador de espín está dada por

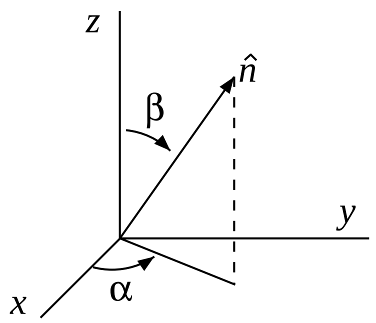
$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right] \\ S_y &= \frac{i\hbar}{2}\left[-|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right] \\ S_z &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\right] . \end{aligned}$$

(c) Escribir los autovectores de S_x en términos de los de S_z.

$\boxed{7}$ En la representación de autovectores de S_z, construya un estado $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ tal que

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ está caracterizado por los ángulos que se muestran en la figura.



Nota: la respuesta es

$$|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \cos(\beta/2)\,|+\rangle + \mathrm{sen}(\beta/2)e^{i\alpha}\,|-\rangle \ .$$

En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, resuelva el problema de autovalores planteado. En la guía de operadores de rotación veremos una manera más simple de obtener este resultado.

$\boxed{8}$ Construir la matriz de cambio de base que conecta la base para la cual S_z es diagonal con la base en la que S_x es diagonal.

$\boxed{9}$ Se tiene un sistema de dos niveles con hamiltoniano

$$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right) ,$$

donde a es un número real con dimensiones de energía y $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son dos estados. Encuentre las energías y los correspondientes autoestados del sistema.

$\boxed{10}$ Dada la matriz

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(a) Pruebe que J es unitaria y halle J^{-1}.

(b) Aplique la transformación $B = JAJ^{-1}$ a una matriz simétrica A y verifique que: (i) B es simétrica, (ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. La transformación $A \mapsto JAJ^{-1}$ se conoce como conjugación.

$\boxed{11}$ Cierto observable tiene una representación matricial dada por

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre los autovectores normalizados de este observable y sus correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?

(b) De un ejemplo físico donde todo esto sea relevante.

$\boxed{12}$ Considere un espacio de Hilbert de dimensión 3. $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ es una base de vectores ortonormales, y en dicha base dos operadores A y B se representan por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

donde a y b son reales.

(a) En la representación anterior es sencillo notar que A tiene un espectro degenerado. ¿Lo es también el de B?

(b) Mostrar que A y B conmutan.

(c) Encontrar un nuevo conjunto de estados ortonormales que sean autoestados simultáneos de A y B. Especificar los autovalores de A y B para cada uno de los tres autovectores. ¿Es posible caracterizar completamente a cada autovector por la especificación de estos autovalores?

$\boxed{13}$ El espacio de estados de cierto sistema está dado por cierto espacio de Hilbert con una base ortonormal dada por $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. En esta base, los operadores H y B están dados por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que los operadores L y S se definen por su acción sobre los vectores de la base

$$\begin{array}{lll} L|u\rangle = |u\rangle & L|v\rangle = 0 & L|w\rangle = -|w\rangle \\ S|u\rangle = |w\rangle & S|v\rangle = |v\rangle & S|w\rangle = |u\rangle \end{array}$$

(a) ¿Pueden H y B ser observables del sistema? Mostrar que H y B conmutan. Construir una base de autovectores común a ambos operadores.

(b) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos $\{H\}$,$\{B\}$,$\{H, B\}$,$\{H^2, B\}$ es un CCOC?

(c) Escribir las matrices que representan a los operadores L, L^2, S, y S^2 en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. ¿Son estos operadores observables?

$\boxed{14}$ Dos observables A_1 y A_2, que no involucran explicitamente el tiempo, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que debe haber alguna degeneración en los autoestados de energía. Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

15 (a) Calcular

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle := \left\langle S_x^2 \right\rangle - \left\langle S_x \right\rangle^2$$

en el estado $|S_z = +\rangle$. Utilizando este resultado, verificar la relación de incerteza generalizada,

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [A, B] \rangle \right|^2$$

para los operadores $A = S_x$ y $B = S_y$.

(b) Verificar la relación de incerteza entre los mismos operadores para el estado $|S_x = +\rangle$.

Espacios de Hilbert, incluso de dimensión infinita.

Recuerde que el producto interno usual de $L^2(\mathbb{R})$ entre un elemento ϕ y otro ψ es $(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}\psi$.

16 (a) Una forma relativamente sencilla de derivar la desigualdad de Schwarz es la siguiente. Primero observe que

$$\left(\langle \alpha | + \lambda^* \langle \beta | \right) \cdot \left(|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle \right) \geq 0$$

para cualquier número complejo λ. Luego, elija λ de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz, $\langle \alpha|\alpha\rangle \langle \beta|\beta\rangle \geq |\langle \alpha|\beta\rangle|^2$.

(b) Para dos observables A y B y un estado cualquiera, demostrar la relación de incerteza de Schrödinger,

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [A, B] \rangle \right|^2 + \frac{1}{4} \left| \langle \{A, B\} \rangle - 2 \langle A \rangle \langle B \rangle \right|^2 \,,$$

donde $\Delta A = A - \langle A \rangle$. Note que la relación de incerteza de Heisenberg se desprende de ésta.

(c) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene si el estado en cuestión satisface

$$\Delta A \, |\psi\rangle = \lambda \Delta B \, |\psi\rangle \,, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Además, concluya que si λ es un imaginario puro entonces se obtiene la igualdad en la relación de incerteza de Heisenberg.

17 (a) En $L^2(\mathbb{R})$ se suele representar al operador posición como $(x\,\phi)(u) = u\phi(u)$ y al momento como $(p\,\phi)(u) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial u}\phi(u)$. Verifique que la función de onda normalizada de un paquete gaussiano, dada por

$$\phi(u) = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{i \langle p \rangle u}{\hbar} - \frac{(u - \langle x \rangle)^2}{4d^2} \right] \in \mathcal{H}$$

satisface la relación de incerteza mínima

$$\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} \sqrt{\langle (\Delta p)^2 \rangle} = \frac{\hbar}{2} \,.$$

Muestre también que la condición

$$\Delta x \phi(u) = c \Delta p \phi(u)$$

donde c es un número imaginario, efectivamente se cumple para dicho paquete, en acuerdo con el ejercicio anterior.

$\boxed{18}$ Considerar un espacio de estados generado por los ciertos autovectores $\{|a_j\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$ de un operador hermítico A. Asumir que el espectro de A no tiene degeneración.

(a) Demotrar que

$$\prod_{j\in\mathbb{N}}(A-a_j)$$

es el operador nulo.

(b) Para k fijo, ¿Cuál es el significado del operador

$$\prod_{j\in\mathbb{N}-\{k\}}\frac{(A-a_j)}{(a_k-a_j)}\ ?$$

(c) Ilustre los dos puntos anteriores para el caso particular de un sistema de espín 1/2 con $A=S_z$ (en dicho caso, el índice j solo toma dos posibles valores).

$\boxed{19}$ Evalúe $\langle(\Delta x)^2\rangle\,\langle(\Delta p)^2\rangle$ para una partícula confinada en un pozo unidimensional, para estados estacionarios: $H\psi=E\psi$ (asuma que el dominio de H son funciones de cuadrado integrable que se anulan en las paredes).

$$V=\begin{cases}0 & \text{si } 0<x<a\\ \infty & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Muestre que para el estado estacionario de menor $\langle(\Delta x)^2\rangle\,\langle(\Delta p)^2\rangle$ se satisface la relación de incerteza de Heisenberg.

$\boxed{20}$ (a) Sea x y p_x la coordenada y el momento lineal en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico

$$\{x,F(p_x)\}_{\text{clásico}}\,.$$

(b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador

$$[x,\exp(\frac{ip_xa}{\hbar})]\ ,$$

y compare con (a) cuando $F(p_x)=\exp(ip_xa/\hbar)$.

(c) Usando el resultado de (b) y asumiendo que el operador x tiene autoestados (cosa que no es cierta en $L^2(\mathbb{R})$!), pruebe que

$$\exp(\frac{ip_xa}{\hbar})\,|b\rangle\ ,$$

es un autoestado del operador x, donde $x\,|b\rangle=b\,|b\rangle\ ,\ b\in\mathbb{R}$. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

$\boxed{21}$ (a) Verifique que las igualdades

$$[x_i,G(\mathbf{p})]=i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i}\qquad\qquad [p_i,F(\mathbf{x})]=-i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones F y G analíticas.

(b) Evalúe $[x^2,p^2]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\{x^2,p^2\}_{\text{clásico}}$ y piense por qué difieren (además del $i\hbar$ usual).

$\boxed{22}$ El operador de traslación para un desplazamiento espacial $\mathbf{a}$ finito está dado por

$$\mathcal{T}(\mathbf{a}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}{\hbar}\right)$$

donde $\mathbf{p}$ es el operador impulso.

(a) Evalue $[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{a})]$.

(b) Muestre que $\mathcal{T}$ es un operador unitario usando que $\mathbf{p}$ es hermítico.

(c) Usando los puntos anteriores, encuentre cómo cambia el valor de expectación $\langle \mathbf{x} \rangle$ frente a traslaciones (es decir, cuando el estado en cuestión pasa de ser ψ a su trasladado $\mathcal{T}(\mathbf{a})\psi$). El resultado justifica interpretar a $\mathcal{T}(\mathbf{a})$ como el operador de traslaciones espaciales.