"Nature isn't classical, dammit, and if you want to make a simulation of nature, you'd better make it quantum mechanical (...)" - Richard Feynman.

---

1 Resolución algebraica del oscilador armónico unidimensional.

(a) Suponer que se tiene un operador N con autovalores n y un operador a tales que $[N, a] = -ca$ con $c \in \mathbb{C}$. Llamamos $|n\rangle$ al autoestado de N con autovalor n (suponemos que no hay degeneración).

I- Mostrar entonces que $a|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n - c$

II- Si N es hermítico, mostrar que $a^\dagger|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n + c$, con n y c reales. Notar que si c es positivo entonces a baja los autovalores y se lo llama *operador de bajada o aniquilación* mientras que $a^\dagger$ los sube y se lo llama *operador de subida o creación.*

(b) Considere un oscilador armónico en una dimensión, y las siguientes definiciones

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,$$

donde $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son autoestados de $N := a^\dagger a$ con autovalor n.

I- Calcular el conmutador $[a, a^\dagger]$ y comprobar que se verifiquen las relaciones de conmutación del inciso (a) con $c = 1$.

II- Muestre que los autovalores de N son enteros no negativos, asumiendo que existe el estado $|0\rangle$. Por lo tanto $n \in \mathbb{N}$.

III- Verificar en la representación de coordenadas que la ecuación $a\,|0\rangle = 0$ tiene solución.

IV- Mostrar que $H = \hbar\omega(N + 1/2)$, con lo que los autestados de N coinciden con los de H.

V- Evalúe $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|n\rangle$, $\langle m|x^2|n\rangle$ y $\langle m|p^2|n\rangle$.

VI- Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

2 Utilizando los resultados del ejercicio anterior, muestre que los autoestados del oscilador armónico unidimensional satisfacen la siguiente relación,

$$\left\langle (\Delta x)^2\right\rangle \left\langle (\Delta p)^2\right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2\,.$$

¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

3 Resuelva la ecuación diferencial $a\,|0\rangle = 0$ en representación de coordenadas para obtener el estado fundamental. Obtener luego el primer estado excitado del oscilador armónico unidimensional a partir de la relación $a^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle$.

4 Considere la función, conocida como función de correlación, definida como

$$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle - \langle x(t)\rangle\,\langle x(0)\rangle\,,$$

donde $x(t)$ es el operador de posición en la representación de Heisenberg a tiempo t. Evaluar explicitamente la función de correlación para el estado fundamental de un oscilador armónico en una dimensión.

5 Se tiene una partícula de masa m en un potencial armónico unidimensional de frecuencia ω en el estado normalizado $|\psi(0)\rangle = (\gamma + \lambda a^\dagger)|0\rangle$ (γ, $\lambda \in \mathbb{C}$), siendo $|0\rangle$ el estado fundamental del sistema y $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right)$ el operador de creación usual. Cierto observable del sistema está dado por $Q = \alpha a + \beta a^\dagger$ (α, $\beta \in \mathbb{C}$).

(a) ¿Qué condición cumplen γ y λ? ¿Qué relación hay entre α y β?

(b) Hallar el estado del sistema a tiempo $t > 0$ y calcular $\langle Q\rangle(t)$ para $t > 0$ en la representación de Schrödinger. Mostrar que $\langle Q\rangle(t)$ es real.

(c) Calcular nuevamente $\langle Q\rangle(t)$ en representación de Heisenberg y comparar con el resultado del inciso anterior.

6 Considere una partícula sujeta a un potencial de oscilador armónico en una dirección. Suponga que a $t = 0$ el estado viene dado por

$$|\varphi\rangle = \exp\left(\frac{-ipd}{\hbar}\right)|0\rangle\,,$$

donde p es el operador de momento y d es un número con dimensiones de longitud. Usando la representación de Heisenberg, evalúe el valor de expectación $\langle x(t)\rangle$ para $t > 0$. Muestre que $|\varphi\rangle$ es autoestado del operador de destrucción a y calcule su autovalor. Interprete el resultado.

7 **Estados coherentes.**
Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle\,,$$

donde λ es en general un número complejo (note que a es no hermitíco).

(a) Demuestre que $|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$ es un estado coherente normalizado.

(b) Demuestre que los estados coherentes verifican la relación de mínima incerteza.

(c) Pruebe que un estado coherente se puede obtener también mediante la aplicación del operador de traslación al estado fundamental.

(d) Calcule $\langle H\rangle$, $\langle P\rangle$ y $\langle X\rangle$ en un estado coherente y muestre que satisfacen la misma relación que las variables clásicas $E = p^2/2m + m\omega^2x^2/2$ para $E \gg \hbar\omega$. ¿Qué condicion impone ésto para los valores de λ?

(e) Halle la evolución temporal de $|\lambda\rangle$ desarrollándolo en la base $\{|n\rangle\}$ de autoestados de H. Muestre que el estado continúa siendo autoestado del operador a, pero que el autovalor α varía en el tiempo. Dibuje en el plano complejo la evolución de α y muestre como varían $\langle H\rangle$ y $\langle P\rangle$ en el tiempo.

(f) Calcular el producto interno entre dos estados coherentes. ¿Son ortogonales?

8 **Oscilador armónico forzado.**
Considere un oscilador armónico cargado (carga $q > 0$) moviéndose unidimensionalmente en presencia de un campo eléctrico constante y uniforme, de modo que el hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2x^2 + qEx.$$

Escribir la función de onda del estado fundamental y hallar el espectro de energía del sistema. Ayuda: Notar que, clásicamente, el efecto del campo eléctrico consiste en desplazar la posición de equilibrio del oscilador.

9 **Oscilador armónico tridimensional isotrópico.**
Cuantizar el oscilador armónico tridimensional isotrópico, cuyo hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{r}^2 \,,$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

(a) Hallar los niveles de energía y la degeneración de cada uno de ellos. Dar una base de los subespacios asociados a los primeros dos niveles de energía degenerados.

(b) Mostrar que los operadores $L_z \doteq xp_y - yp_x$ y $\mathbf{L}^2 \doteq \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}$ conmutan con H.

(c) Dar dos CCOC.

10 **Electrón en un campo magnético.**
El hamiltoniano de un electrón con carga e en presencia de un potencial vector estático $\mathbf{A}(x, y, z)$ está dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(x, y, z) \right]^2$$

(a) Reescribir el hamiltoniano anterior en término de los operadores $\Pi_i \doteq p_i - \frac{eA_i}{c}$.

(b) Calcular $[x_i, \Pi_j]$ y $[\Pi_i, \Pi_i]$.

Considerar a partir de ahora el caso en que el campo magnético es uniforme en la dirección z, es decir $\boldsymbol{B} = B\hat{e}_z$. En tal caso, se puede tomar como potencial vector $\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x(x, y)\hat{e}_x + A_y(x, y)\hat{e}_y$, con $A_x = B_y/2$, $A_y = B_x/2$. En este gauge tenemos que $\Pi_z = p_z$.

(c) Muestre que $[p_z, H] = 0$. ¿Qué consecuencias tiene esto? ¿Cuáles son los autovalores de p_z?.

(d) ¿Cuánto vale el conmutador $[\Pi_x, \Pi_y]$ en este caso? Muestre que redefiniendo los operadores Π_x y Π_y, multiplicándolos por una constante apropiada, se obtiene la relación de conmutación canónica.

(e) Concluya que los autovalores del Hamiltoniano del electrón en el campo magnético uniforme son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc} \left(n + \frac{1}{2} \right) \,,$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$, y $k \in \mathbb{R}$. Interpretar.

11 Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Se tiene una partícula de masa m sometida al potencial del oscilador armónico unidimensional con frecuencia de oscilación ω. A tiempo $t = 0$, el sistema se encuentra en un estado para el cual una medición de la energía puede resultar solamente en los valores $\hbar\omega/2$ y $3\hbar\omega/2$ con la misma probabilidad, y en el que el valor medio del momento es igual a $(m\omega\hbar/2)^{1/2}$. Esta información determina completamente el estado del sistema a $t = 0$.

(b) En la representación de Heisenberg, el operador de número del oscilador armónico unidimensional es independiente del tiempo.

(c) Se tiene un oscilador armónico isotrópico de frecuencia ω en d dimensiones. Entonces, el nivel asociado a la energía $\hbar\omega \left(N + \frac{d}{2} \right)$ (siendo N un entero no negativo) tiene degeneración $\dfrac{(N + d - 1)!}{N!\,(d - 1)!}$.