"Due to the lucidity and apparently incontestable character of the argument, the paper of Einstein, Podolsky and Rosen created a stir among physicists and has played a large role in general philosophical discussion. Certainly, the issue is of a very subtle character and suited to emphasize how far, in quantum theory, we are beyond the reach of pictorial visualization." - N. Bohr.

---

1 Considere dos partículas con espín 1/2.

(a) Escribir los elementos de la base del producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada espín, que además son autoestados comunes de S^2 y S_z total (triplete y singlete)

$$\{|s=1,m=1\rangle\,,\quad |s=1,m=-1\rangle\,,\quad |s=1,m=0\rangle\}\,,\quad \{|s=0,m=0\rangle\}\,,$$

en función de los kets en la representación $\{m_1, m_2\}$, usando los operadores $S_\pm$ y ortogonalidad.

(b) Verificar que el estado del singlete ($s=0$) es antisimétrico ante el intercambio de partículas, mientras que los estados del triplete ($s=1$) son simétricos.

(c) Evaluar cuáles de los estados del triplete y singlete son autoestados del operador de espín para cada partícula en alguna dirección y pensar qué sentido tiene en cada caso hablar de la alineación relativa entre los espines. ¿Qué diferencia a los estados $|s=0,m=0\rangle$ y $|s=1,m=0\rangle$?

2 **Paradoja EPR**[1]

Considere un sistema formado por dos partículas de espín 1/2. Un observador A se especializa en medir las componentes de espín de una de las partículas (S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}), mientras que el observador B mide las componentes de espín de la otra partícula. Suponga que se sabe que el sistema está en un estado singlete de espín, es decir que $S_{total}=0$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el observador A obtenga $S_{1z}=\hbar/2$ cuando el observador B no efectúa mediciones? Repita el cálculo para $S_{1x}=\hbar/2$.

(b) El observador B mide $S_{2z}=\hbar/2$. ¿Qué puede decir sobre el resultado de la medición posterior de A si: (i) A mide S_{1z}, (ii) A mide S_{1x}? Justifique su respuesta.

(c) Compare las dos situaciones de los items anteriores. Note que el aparato de medición de A obtiene resultados correlacionados con los de B sólo si B mide en la misma dirección que A. Por esto, la elección de la dirección de medición de A y B influye en el grado de correlación de las mediciones, aún si A y B están separados años luz de distancia (ver por ejemplo la sección 3.10 del Sakurai).

3 Considere una partícula de espín 1/2 en un estado con $l=1$.

(a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l,s,m_l,m_s\rangle$.

(b) Use $J_-=L_-+S_-$ para generar todos los estados $|j_{max},m\rangle$.

(c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max}-1,j_{max}-1\rangle$.

(d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max}-1,m\rangle$.

(e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j=1/2$ y $m=1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

4 Considerar dos momentos angulares $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{J}_2$, con autovalores $\hbar j_i(j_i+1)$ de $\mathbf{J}_i^2$ con $j_1=1$ y $j_2=1$. Encontrar los autoestados comunes a $(\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2)^2$, $J_{1z}+J_{2z}$, $\mathbf{J}_1^2$ y $\mathbf{J}_2^2$. Verificar el resultado obtenido utilizando la tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan.

---

[1] El paper original se encuentra disponible en la sección "Material Adicional" de la página web de la materia.

5 Una partícula A de espín $3/2$, en un estado con momento angular nulo, se desintegra mediante una reacción

$$A \to B + C$$

que conserva el momento angular total, siendo B y C partículas de espín $1/2$ y 0 respectivamente.

(a) ¿Qué valores puede tomar el momento angular orbital total del par de partículas B y C?

(b) ¿Cuáles son los autovalores de la proyección en el eje z del espín de la partícula A? Si se conoce que la partícula A se encontraba en un estado con máxima proyección de espín en el eje z antes de decaer, y luego de la reacción se encuentra que a la partícula B en el estado con mínima proyección de espín en el eje z, ¿cuál es el momento angular orbital total del par $B - C$?

(c) Para cada valor de la proyección de espín en z de la partícula A y todos los correspondientes valores de momento angular orbital total del par $B - C$, determinar la probabilidad de encontrar a la partícula B con proyección de espín z máxima en la dirección z.

6 Considere una partícula de espín $1/2$ y masa m, que está sometida a un potencial tipo oscilador armónico tridimensional isotrópico al que se le añade un potencial $\gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ (que se conoce como término de **interacción espín-órbita**), donde $\mathbf{L}$ es el momento angular orbital y $\mathbf{S}$ el espín de la partícula. El hamiltoniano total está dado entonces por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \; .$$

(a) Halle exactamente las energías y autoestados de H correspondientes al nivel fundamental y al primer excitado. Ayuda: pruebe que los estados con $N = 1$ ($N = n_x + n_y + n_z$) tienen $l = 1$.

(b) Si en $t = 0$ el sistema está en el estado $|\varphi\rangle = |N = 1, L_z = \hbar, S_z = \hbar/2\rangle$, halle $|\varphi(t)\rangle$. Si en $t = 0$ se mide la energía, ¿qué resultado se obtiene? ¿Y si se mide L^2 o L_z? ¿Qué ocurre si las mediciones se realizan a $t > 0$?

(c) Repita el ítem anterior para el estado a $t = 0$ dado por $|\psi\rangle = |N = 1, L_z = -\hbar, S_z = \hbar/2\rangle$

7 Considerar un sistema de tres partículas de espín $1/2$. Una base del espacio de Hilbert del sistema está dada por $|\pm\rangle_1 \otimes |\pm\rangle_2 \otimes |\pm\rangle_3$, donde $|\pm\rangle_i$ son los autoestados comunes a $\mathbf{S}^{(i)2}$ y $S_z^{(i)}$, siendo $\mathbf{S}^{(i)}$ el operador de espín de la partícula i. Encontrar otra base para la cual sus elementos sean autoestados comunes de $\mathbf{S}^2$ y S_z, siendo $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)} + \mathbf{S}^{(2)}$.

8 Cierto sistema cuántico de cuatro partículas (distinguibles), todas de espín $1/2$, tiene un hamiltoniano dado por

$$H_0 = -\gamma \left(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 + \bar{S}_2 \cdot \bar{S}_3 + \bar{S}_3 \cdot \bar{S}_4 + \bar{S}_4 \cdot \bar{S}_1 \right) \; ,$$

donde γ es una constante positiva y $\bar{S}_i$ es el operador espín de la partícula i-ésima ($i = 1, 2, 3, 4$).

(a) ¿Cuál es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema?

(b) Hallar los niveles de energía y su correspondiente degeneración (no es necesario escribir explícitamente los autoestados).

(c) Se realizan sobre el sistema mediciones de $\mathbf{S}^2$ y S_z (siendo $\mathbf{S}$ el operador espín total del sistema) y se obtienen los valores $2\hbar^2$ y $\hbar$ respectivamente. ¿Es esta información suficiente para determinar el estado del sistema luego de estas mediciones?

9 Un núcleo de espín 3/2 situado en el origen es sometido a un campo eléctrico inhomogéneo. La interacción eléctrica cuadrupolar básica se puede tomar como :

$$H_{int} = \frac{eQ}{2s(s-1)\hbar^2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 S_x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 S_y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right] \, ,$$

donde ϕ es el potencial electrostático que satisface la ecuación de Laplace, y los ejes de coordenadas se eligen de manera que $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)_0 = 0$. Muestre que la energía de interacción puede ser escrita como

$$A(3S_z^2 - S^2) + B(S_+^2 + S_-^2) \, ,$$

y exprese A y B en función de $\partial^2\phi/\partial x^2$ y demás derivadas parciales. Determine los autoestados de energía (en términos de $|m\rangle$, donde $m = \pm 3/2, \pm 1/2$) y los correspondientes autovalores. ¿Hay alguna degeneración?

10 Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) El estado singlete de espín asociado a dos electrones es un estado entrelazado.

(b) La función de onda de un estado con $j = 1$ formado mediante el acoplamiento de dos partículas con espín 0 provenientes de orbitales p, resulta antisimétrica ante el intercambio de las partículas.

Tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan