"We will have to abandon the philosophy of Democritus and the concept of elementary particles. We should accept instead the concept of elementary symmetries." - W. Heisenberg.

---

1 **Teorema de Wigner**
Considerar una transformación que lleva estados físicos $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ a $|\phi'\rangle$ y $|\psi'\rangle$, y es tal que resulta

$$|\langle\psi'|\phi'\rangle| = |\langle\psi|\phi\rangle|\,,$$

para todo ψ y ϕ en el espacio de Hilbert. El teorema de Wigner nos dice que dicha transformación puede representarse actuando sobre el espacio de Hilbert por medio de un operador que es unitario o antiunitario.

(a) Dar ejemplos de operadores que cumplan la hipótesis del teorema de Wigner y que sean unitarios.

(b) * Para una partícula unidimensional sin espín y cuyo operador de evolución es $U(t)$, se define el operador de inversión temporal T por medio de la siguiente acción $T\left[U(t)|\psi\rangle\right] = \left[U(t)^{-1}|\psi\rangle\right]$, para $|\psi\rangle$ arbitrario. Ver que T es antilineal (lo que implica entonces que es antiunitario) y tal que $T|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$, siendo $|\alpha\rangle$ los autoestados del Hamiltoniano.

2 Decimos que una transformación U es una simetría de un sistema si deja invariante el módulo del producto interno entre dos vectores cualesquiera y además deja invariante al hamiltoniano del sistema H (es decir, cumple $UHU^{-1} = H$). Demostrar que:

(a) $e^{-ip\cdot d/\hbar}$, siendo d una constante real, es una simetría de la partícula libre unidimensional.

(b) $e^{-i\mathbf{L}\cdot\hat{\mathbf{n}}/\hbar}$, siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un versor constante real, es una simetría del oscilador armónico isotrópico tridimensional.

(c) $e^{-i\epsilon H/\hbar}$, siendo ϵ una constante real, es una simetría de cualquier sistema cuyo hamiltoniano H no dependa explícitamente del tiempo.

Simetrías continuas

3 Sea $U(s) = e^{isK}$, con K hermítico y s real, un operador que es simetría de cierto sistema físico de hamiltoniano H independiente del tiempo para todo s.

(a) Probar que $[H, K] = 0$. K se conoce como el generador infinitesimal de la simetría.

(b) Demostrar que el valor de expectación de K se conserva en el tiempo. Se dice que K es entonces una constante de movimiento.

(c) Probar que el momento lineal es la constante de movimiento asociada a la invariancia ante traslaciones arbitrarias.

(d) Probar que L_z es la constante de movimiento asociada a la invariancia ante rotaciones arbitrarias respecto al eje z.

4 **Simetrías y degeneración**
Sea G el generador infinitesimal de una simetría de cierto sistema con hamiltoniano H. Demostrar que si $|\psi\rangle$ es un autoestado de H con energía E, entonces $f(G)|\psi\rangle$ (siendo f una función analítica) también es autoestado de H y tiene la misma energía E [1].

[1] Como en general será $f(G)|\psi\rangle \neq |\psi\rangle$, la existencia de simetrías suele generar un aumento en la degeneración de los niveles de energía.

5 **Degeneración en el átomo de Hidrógeno**

El hamiltoniano del átomo de Hidrógeno está dado por

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}\,.$$

(a) Demostrar que $\mathbf{L}\cdot e_n$, siendo e_n un versor arbitrario, es un generador de simetría. Probar que esto implica que los niveles de energía no dependen de m.

(b) Demostrar que el vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2me^2}\left(\mathbf{L}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{L}\right) + \frac{\mathbf{r}}{r}\,,$$

conmuta con H_0. $\mathbf{K}$ es el generador infinitesimal de una transformación de simetría y es la existencia de esta simetría la responsable de la *degeneración accidental* en el espectro de energía del átomo de Hidrógeno. Para una derivación detallada ver por ejemplo la sección *"SO(4) Symmetry in the Coulomb Potential"* en el capítulo 4 del libro de Sakurai.

(c) Incluyendo el acoplamiento espín-órbita, el hamiltoniano electrónico para el átomo de hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3}\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}{\hbar^2}\,,$$

donde $\mathbf{S}$ representa el espín del electrón.

Evaluar los conmutadores

$$\left[H, L^2\right]\ ,\left[H, S^2\right]\ ,\left[H, J^2\right]\ ,\left[H, L_z\right]\ ,\left[H, S_z\right]\ ,\left[H, J_z\right]\ ,$$

donde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

6 Considerar una partícula en tres dimensiones en un potencial tipo pozo esférico infinito

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & si \quad |\mathbf{r}| \leq a \\ \infty & si \quad |\mathbf{r}| > a \end{cases}$$

Hallar los niveles de energía (ver por ejemplo el Ejemplo 4.1 del libro de Griffiths). ¿Qué simetría es la responsable de la degeneración que aparece en dichos niveles?

7 Se tiene una partícula de masa m en un potencial

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{1}{2}m\omega'^2 z^2\,.$$

Probar que el sistema es invariante ante rotaciones alrededor del eje z y conectar esta simetría con la degeneración de los niveles de energía.

8 Se tiene una partícula libre de masa m en un anillo. Encontrar los estados de energía definida y analizar qué cantidades se conservan. Verificar además que la distribución de momentos de la partícula en un estado de energía definida es discreta.

Simetrías discretas

9 **Teorema de Bloch**

Un cristal tiene invariancia ante traslaciones en un vector de la forma $\mathbf{R}_n = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$, con n_i entero. Esto significa que el hamiltoniano H del cristal es invariante ante traslaciones en el vector R_n, es decir $[H, U(\mathbf{R}_n)] = 0$, siendo $U(\mathbf{R}_n) = \exp(-ip \cdot \mathbf{R}_n/\hbar)$.

(a) Demostrar que los autovalores de $U(\mathbf{R}_n)$ tienen la forma $c(\mathbf{R}_n) = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n)$, siendo $\mathbf{k}$ un vector de componentes reales.

(b) Como H y $U(\mathbf{R}_n)$ conmutan, tienen una base común de autofunciones $\Psi(\mathbf{r})$. Demostrar que dichas autofunciones satisfacen

$$\Psi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n)\, \Psi(\mathbf{r}) \ .$$

(c) Expandir las autofunciones del inciso anterior en ondas planas y demostrar que la distribución de momentos asociada es discreta.

10 Considere dos autoestados del operador paridad

$$\Pi\,|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha\,|\alpha\rangle \qquad \Pi\,|\beta\rangle = \epsilon_\beta\,|\beta\rangle \ ,$$

donde los autovalores ϵ_α y ϵ_β pueden ser 1 o -1. Muestre que

$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = 0$$

salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^* \mathbf{x} \phi_\alpha \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0$ si ϕ_α y ϕ_β tienen la misma paridad. ¿Qué ocurre con $\langle\beta|\mathbf{p}|\alpha\rangle$? ¿Y con $\langle\beta|\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}|\alpha\rangle$?

11 Sea una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico cuyo estado inicial a $t = 0$ es el estado coherente

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \ ,$$

donde $\beta \in \mathbb{C}$.

(a) Se mide el operador paridad Π a $t = 0$ obteniéndose el autovalor $+1$. ¿Cuál es el estado $|\psi\rangle$ del sistema a tiempo $t > 0$?

(b) ¿Qué valores puede tomar a $t > 0$ el operador H y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado a un tiempo posterior? ¿Cuál es el primer estado excitado? ¿Qué resultados posibles daría la medición de Π?

12 Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Se tiene un sistema con hamiltoniano $H = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha L_z + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$ y estado fundamental $|0\rangle$ no degenerado. Entonces, resulta $\langle 0|\,(x^2+y^2)\,z|0\rangle = 0$ y $\langle 0|xy|0\rangle = 0$.

(b) Cierto estado $|\phi\rangle$ es autovector simultáneo de los operadores de paridad y momento lineal. Entonces, el valor de expectación del momento lineal en dicho estado es nulo.

(c) * Si el hamiltoniano de un sistema no degenerado y sin espín es invariante ante inversión temporal, entonces la función de onda, puede ser elegida real en cada instante de tiempo.