Primer parcial de Física Teórica 3
10/5/2017

Problema 1

Considere un recipiente cuyo interior y superficie están divididos en M y N celdas respectivamente. Cada celda puede contener como máximo una partícula. Una celda del interior tiene siempre energía 0, y una de la superficie tiene energía 0 si está vacía y $-\epsilon$ (con $\epsilon > 0$) si está llena. El recipiente contiene N partículas (tantas como celdas hay en la superficie) indistinguibles.

(a) En el ensamble microcanónico, calcule la entropía del sistema como función de su energía.

(b) Calcule el número de partículas en la superficie en función de la temperatura T. Estudie los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$ y discuta sus resultados.

(c) Suponiendo que las celdas del interior tienen volumen v y las de la superficie no tienen volumen, calcule la presión en función de T. Discuta sus resultados en el límite de gas diluido, $N \ll M$.

Problema 2

Un conjunto de N dados se encuentra sobre una superficie horizontal de área A que vibra fuertemente. Los dados, de masa M y lado l, pueden desplazarse libremente sobre la superficie y cambiar de cara. El sistema, pues, se puede interpretar como un gas ideal bidimensional cuyas partículas tienen un grado de libertad interno (la cara visible del dado) con seis estados posibles. Los dados están cargados para que salga el número 6 con una masa puntual m en el centro de la cara 1. El sistema se encuentra en equilibrio a temperatura T en presencia del campo gravitatorio terrestre.

(a) Calcule la función de partición canónica del sistema.

(b) Calcule la energía media del sistema. Estudie los límites de temperaturas altas y bajas y discuta sus resultados.

(c) Calcule el número medio de veces que aparece cada una de las caras (*ayuda*: según cómo lo piense le puede ser útil notar que, para cada microestado, el número de veces que aparece la cara $s \in \{1, \ldots, 6\}$ es

$$n_s(s_1, \ldots, s_N) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{s s_i},$$

donde s_i es la cara visible del dado i y δ es la delta de Kronecker). ¿Qué sucede a $T = 0$?

Problema 3

Considere un gas diluido formado por partículas de masa m, en ausencia de fuerzas externas, descripto por una función de distribución independiente del tiempo, $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$, y con velocidad media nula, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = 0$.

(a) A partir de la ecuación de Boltzmann pruebe que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} = 0$, donde $\boldsymbol{q}$ es la corriente de energía cinética.

(b) Si escribimos $f = f_0 + \delta f$, con

$$f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \frac{n(\boldsymbol{r})}{[2\pi m k T(\boldsymbol{r})]^{3/2}} e^{-p^2/2mkT(\boldsymbol{r})},$$

y determinamos δf mediante la aproximación de tiempo de relajación, encuentre la relación que deben cumplir la densidad de partículas n y la temperatura T para que la velocidad media efectivamente se anule.

(c) Pruebe que $\boldsymbol{q} = -\kappa \boldsymbol{\nabla} T$, donde κ es una constante (la conductividad térmica), y determine el valor de esta última en términos del tiempo de relajación τ. (*Ayuda*: $\int d^3p\, p^2 p_i p_j f_0 = 5n(mkT)^2 \delta_{ij}$.)

(d) Si el gas está contenido en un tubo de longitud L cuyos extremos se encuentran a temperaturas T_1 y T_2, determine T como función de la distancia, x, a uno de los extremos (asumiendo que no depende de las otras coordenadas).