

Resolución del primer parcial de Física Teórica 3 Primer cuatrimestre de 2017

Problema 1

(a) Como las partículas son indistinguibles, dar un microestado del sistema corresponde a decir cuántas partículas hay en cada celda. Como las celdas pueden contener como máximo una partícula, eso equivale a decir cuáles son las celdas ocupadas. Un microestado con energía E tiene

$$n = -E/\epsilon \quad (1)$$

celdas ocupadas en la superficie. Así pues, el número de microestados con energía E es el número de formas de elegir esas n celdas multiplicado por el número de formas de elegir las $N - n$ celdas que tienen que estar ocupadas en el interior,

$$\Omega(E) = \binom{N}{n} \binom{M}{N-n}. \quad (2)$$

Usando la fórmula de Stirling ($\ln m! = m \ln m - m$ para $m \gg 1$), obtenemos que la entropía vale

$$\begin{aligned} S(E) &= k \ln \Omega(E) \\ &= k \{ N \ln N - n \ln n - (N - n) \ln(N - n) \\ &\quad + M \ln M - (N - n) \ln(N - n) - [M - (N - n)] \ln[M - (N - n)] \}, \end{aligned} \quad (3)$$

con n dado en términos de E por (1). Nótese que los términos lineales de la fórmula de Stirling se cancelaron; eso pasa siempre que tomamos el logaritmo de un combinatorio.

(b) El número de partículas en la superficie es igual al número de celdas ocupadas en la superficie, es decir n . Para expresarlo en función de la temperatura usamos la definición de esta última,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial n} \\ &= -\frac{k}{\epsilon} \{ -\ln n - 1 + 2[\ln(N - n) + 1] - \ln[M - (N - n)] - 1 \} \\ &= -\frac{k}{\epsilon} \ln \frac{(N - n)^2}{n[M - (N - n)]}. \end{aligned} \quad (4)$$

Pasando el factor $-k/\epsilon$ al otro lado y exponenciando, obtenemos

$$e^{-\beta\epsilon} = \frac{(N - n)^2}{n[M - (N - n)]}. \quad (5)$$

Pasando el denominador al otro lado y desarrollando los productos obtenemos una ecuación cuadrática para n ,

$$(1 - e^{-\beta\epsilon})n^2 - [2N + (M - N)e^{-\beta\epsilon}]n + N^2 = 0, \quad (6)$$

cuya solución es

$$n = \frac{[2N + (M - N)e^{-\beta\epsilon}] \pm \sqrt{[2N + (M - N)e^{-\beta\epsilon}]^2 - 4(1 - e^{-\beta\epsilon})N^2}}{2(1 - e^{-\beta\epsilon})}. \quad (7)$$

¿Con qué signo nos quedamos? Notemos que $2N + (M - N)e^{-\beta\epsilon} > 2N - Ne^{-\beta\epsilon} > 2N(1 - e^{-\beta\epsilon})$, y por lo tanto el primer término de la suma/resta de arriba es mayor que N . Pero n nunca puede ser mayor que N , así que nos tenemos que quedar con el signo menos,

$$n = \frac{2N + (M - N)e^{-\beta\epsilon} - \sqrt{[2N + (M - N)e^{-\beta\epsilon}]^2 - 4(1 - e^{-\beta\epsilon})N^2}}{2(1 - e^{-\beta\epsilon})}. \quad (8)$$

Estudiemos ahora los límites de temperaturas altas y bajas. Para $T \rightarrow 0$ tenemos $\beta \rightarrow \infty$ y por lo tanto $e^{-\beta\epsilon} \rightarrow 0$. En este límite, pues, la mayoría de los términos se van (incluyendo toda la raíz cuadrada) y nos queda

$$n = N \text{ para } T \rightarrow 0. \quad (9)$$

Este resultado era de esperar: a temperatura 0 el sistema se encuentra en el estado fundamental, que en este caso corresponde a que haya el máximo número de partículas posible en la superficie. Para $T \rightarrow \infty$ tenemos $\beta \rightarrow 0$ y por lo tanto $e^{-\beta\epsilon} \rightarrow 1$. Entonces tanto el numerador como el denominador de (8) se anulan, así que para romper la indeterminación tenemos que expandirlos Taylor a primer orden,

$$\begin{aligned} n &\simeq \frac{2N + (M - N)(1 - \beta\epsilon) - \sqrt{[2N + (M - N)(1 - \beta\epsilon)]^2 - 4\beta\epsilon N^2}}{2\beta\epsilon} \\ &= \frac{M + N - (M - N)\beta\epsilon - \sqrt{[M + N - (M - N)\beta\epsilon]^2 - 4\beta\epsilon N^2}}{2\beta\epsilon} \\ &\simeq \frac{M + N - (M - N)\beta\epsilon - \sqrt{(M + N)^2 - [2(M + N)(M - N) + 4N^2]\beta\epsilon}}{2\beta\epsilon} \\ &= \frac{M + N - (M - N)\beta\epsilon - (M + N)\sqrt{1 - \frac{2(M + N)(M - N) + 4N^2}{(M + N)^2}\beta\epsilon}}{2\beta\epsilon} \\ &\simeq \frac{M + N - (M - N)\beta\epsilon - (M + N)\left[1 - \frac{(M + N)(M - N) + 2N^2}{(M + N)^2}\beta\epsilon\right]}{2\beta\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} \left[-(M - N) + \frac{(M + N)(M - N) + 2N^2}{M + N} \right] = \frac{N^2}{M + N}. \end{aligned} \quad (10)$$

En la primera línea hemos usado que $e^x \simeq 1 + x$, en la tercera que $(a + x)^2 \simeq a^2 + 2ax$ y en la quinta que $\sqrt{1 + x} \simeq 1 + x/2$. Así pues, concluimos que

$$n = \frac{N^2}{M + N} \text{ para } T \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Este resultado también era de esperar: a $T \rightarrow \infty$ todos los microestados (sin importar su energía) son igualmente probables. Por lo tanto, la probabilidad de que una partícula dada se encuentre en la superficie es el número de celdas en la superficie

dividido por el número de celdas total, $N/(M + N)$, y el número de partículas en la superficie es esa probabilidad multiplicada por N .

(c) Si las celdas del interior tienen volumen v y las de la superficie no tienen volumen, el volumen total del sistema es $V = Mv$. Por lo tanto, de la definición de la presión tenemos

$$\begin{aligned} \frac{p}{T} &= \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{v} \frac{\partial S}{\partial M} \\ &= \frac{k}{v} \{ \ln M + 1 - \ln[M - (N - n)] - 1 \} = \frac{k}{v} \ln \frac{M}{M - (N - n)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Así pues,

$$p = \frac{kT}{v} \ln \frac{1}{1 - \frac{N-n}{M}}, \quad (13)$$

donde n viene dado en función de la temperatura por la ecuación (8). En el caso de gas diluido, $N \ll M$, tenemos $(N - n)/M \ll 1$. Expandiendo Taylor a primer orden en la ecuación de arriba obtenemos

$$p \simeq \frac{kT}{v} \ln \left(1 + \frac{N - n}{M} \right) \simeq \frac{kT}{v} \frac{N - n}{M} = \frac{(N - n)kT}{V}. \quad (14)$$

Es decir, las $N - n$ partículas que ocupan el interior del recipiente se comportan (en lo que respecta a la presión) como un gas ideal.

Problema 2

(a) Tenemos un sistema de partículas indistinguibles que no interactúan entre sí. La indistinguibilidad la tratamos de forma aproximada: calculamos las sumas sobre estados del sistema como si las partículas fueran distinguibles y después dividimos por $N!$. Para partículas distinguibles no interactuantes la función de partición canónica factoriza, así que

$$Q = \frac{1}{N!} Q_1^N, \quad (15)$$

donde Q_1 es la función de partición canónica de una sola partícula, es decir, de un dado. ¿Cómo especificamos el estado de un dado? Tenemos que dar su posición \mathbf{q} , su momento \mathbf{p} y su cara visible s , que toma valores enteros entre 1 y 6. Así pues,

$$Q_1 = \underbrace{\int \frac{d^2q d^2p}{h^2} \sum_{s=1}^6}_{\text{Suma sobre estados de un dado}} e^{-\beta\epsilon(\mathbf{p},s)}, \quad (16)$$

donde h es la constante de Planck y $\epsilon(\mathbf{p}, s)$ es la energía de un dado con momento \mathbf{p} que muestra la cara s (ya tenemos en cuenta que ésta no depende de \mathbf{q}). Nótese que, como el movimiento se produce sobre una superficie, la posición y el momento son vectores de dos dimensiones. ¿Cuánto vale la energía de un dado? Es la suma de la energía cinética más la potencial,

$$\epsilon(\mathbf{p}, s) = \frac{p^2}{2(M + m)} + V(s), \quad (17)$$

donde hemos tenido en cuenta que la masa total del dado es su masa intrínseca más la de la partícula puntual agregada a la cara 1, y que, como el dado se mueve sobre una superficie horizontal, su energía potencial sólo depende de la cara que muestra. La energía potencial es la del dado sin carga más la de la masa puntual. Si tomamos como $z = 0$ la altura del centro del dado, la primera de estas energías potenciales se anula y tenemos

$$V(1) = mgl/2, V(6) = -mgl/2, V(2) = \dots = V(5) = 0. \quad (18)$$

Reemplazando (17) en (16) vemos que Q_1 es el producto de su parte traslacional y su parte interna,

$$Q_1 = \int \frac{d^2q d^2p}{h^2} \sum_{s=1}^6 e^{-\beta \left[\frac{p^2}{2(M+m)} + V(s) \right]} = \int \frac{d^2q d^2p}{h^2} e^{-\frac{p^2}{2(M+m)}} \sum_{s=1}^6 e^{-\beta V(s)}. \quad (19)$$

El primer factor es la típica integral gaussiana del gas ideal común (en dos dimensiones), y el segundo factor es una suma de seis términos que se calcula usando (18), dando como resultado

$$Q_1 = \frac{A}{\lambda^2} [4 + 2 \cosh(\beta mgl/2)] \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi(M+m)kT}}. \quad (20)$$

Reemplazando en (15) obtenemos

$$Q = \frac{1}{N!} \left\{ \frac{A}{\lambda^2} [4 + 2 \cosh(\beta mgl/2)] \right\}^N. \quad (21)$$

(b) La energía media se deriva de la función de partición canónica,

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q = N \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{A}{\lambda^2} - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln [4 + 2 \cosh(\beta mgl/2)] \right\} \\ &= N \left[kT - \frac{mgl \sinh(\beta mgl/2)}{4 + 2 \cosh(\beta mgl/2)} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

En el límite $T \rightarrow 0$ tenemos $\beta \rightarrow \infty$ y por lo tanto el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico que aparecen en esta ecuación se aproximan ambos por $e^{\beta mgl/2}/2$. Teniendo en cuenta que esta exponencial es muy grande frente al 4 que aparece en el denominador, obtenemos

$$U = -Nmgl/2 \text{ para } T \rightarrow 0. \quad (23)$$

Este resultado era de esperar: a temperatura 0 todos los dados se encuentran en su estado fundamental, cuya energía es $-mgl/2$. Por otra parte, en el límite $T \rightarrow \infty$ tenemos $\beta \rightarrow 0$ y por lo tanto el seno hiperbólico se anula, así que

$$U = NkT \text{ para } T \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Este resultado también era de esperar: a temperatura infinita todos los estados son igualmente probables, así que las energías potenciales positivas se cancelan con las

negativas al tomar el valor medio y sólo contribuyen las energías cinéticas, por lo que recuperamos la energía media de un gas ideal común en dos dimensiones.

(c) Por definición, el número medio de veces que aparece la cara s es

$$\langle n_s \rangle = \frac{1}{N!} \underbrace{\int \frac{d^{2N}q d^{2N}p}{h^{2N}} \sum_{s_1, \dots, s_N} n_s(s_1, \dots, s_N) P(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, s_1; \dots; \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, s_N)}_{\text{Suma sobre estados del sistema}}, \quad (25)$$

donde hemos incluido el factor $1/N!$ por coherencia con nuestra forma aproximada de tratar la indistinguibilidad de las partículas, y $P(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, s_1; \dots; \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, s_N)$ es la probabilidad del estado $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, s_1; \dots; \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, s_N)$,

$$P(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, s_1; \dots; \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, s_N) = \frac{1}{Q} \exp \left\{ -\beta \sum_{j=1}^N \left[\frac{p_j^2}{2(M+m)} + V(s_j) \right] \right\}. \quad (26)$$

Notemos que el factor $1/N!$ en (25) se cancela con el que aparece en Q , así que el valor medio de n_s es insensible a la distinguibilidad o indistinguibilidad de las partículas dentro de nuestra aproximación. Notemos también que la probabilidad (26) factoriza,

$$P(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, s_1; \dots; \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, s_N) = N! P(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, s_1) \dots P(\mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, s_N), \quad (27)$$

donde

$$P(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s) = \frac{1}{Q_1} e^{-\beta \left[\frac{p^2}{2(M+m)} + V(s) \right]} \quad (28)$$

es la probabilidad del estado $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s)$ de un solo dado. Reemplazando (27) en (25) y usando la ayuda del enunciado obtenemos

$$\begin{aligned} \langle n_s \rangle &= \sum_{i=1}^N \int \frac{d^{2N}q d^{2N}p}{h^{2N}} \sum_{s_1, \dots, s_N} \delta_{s s_i} P(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, s_1) \dots P(\mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N, s_N) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\prod_{j \neq i} \int \frac{d^2q_j d^2p_j}{h^2} \sum_{s_j=1}^6 P(\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j, s_j) \right] \int \frac{d^2q_i d^2p_i}{h^2} P(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, s) \\ &= \sum_{i=1}^N \int \frac{d^2q_i d^2p_i}{h^2} P(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, s) \\ &= N \int \frac{d^2q d^2p}{h^2} P(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s). \end{aligned} \quad (29)$$

En la segunda línea hemos usado que, de la suma sobre s_i , sólo sobrevive el término $s_i = s$ debido a la presencia de la delta; en la tercera, que las probabilidades están normalizadas a uno; y en la cuarta, que \mathbf{q}_i y \mathbf{p}_i son variables mudas. Reemplazando (28) en la última integral e integrando obtenemos

$$\langle n_s \rangle = \frac{N e^{-\beta V(s)}}{4 + 2 \cosh(\beta mgl/2)}, \quad (30)$$

así que

$$\begin{aligned}\langle n_1 \rangle &= \frac{N e^{-\beta mgl/2}}{4 + 2 \cosh(\beta mgl/2)} & \langle n_6 \rangle &= \frac{N e^{\beta mgl/2}}{4 + 2 \cosh(\beta mgl/2)} \\ \langle n_2 \rangle = \dots = \langle n_5 \rangle &= \frac{N}{4 + 2 \cosh(\beta mgl/2)}.\end{aligned}\quad (31)$$

A temperatura 0 tenemos $\beta \rightarrow \infty$, y por lo tanto $\langle n_1 \rangle = \dots = \langle n_5 \rangle = 0$ y $\langle n_6 \rangle = N$, es decir, todos los dados muestran la cara 6. Eso era de esperar, porque a temperatura 0 el sistema se encuentra en su estado fundamental.

Comentario. Notemos que la última línea de la ecuación (29) nos dice que

$$\langle n_s \rangle = NP(s), \quad (32)$$

donde $P(s)$ es la probabilidad de que un cierto dado muestre la cara s . Esta ecuación la podríamos haber anticipado a partir de la interpretación frecuentista de la probabilidad (la probabilidad de que un cierto dado muestre la cara s es el número de veces que apareció esa cara dividido por el número de dados), con lo que habríamos llegado al resultado final de forma menos cuentosa.

Problema 3

(a) Si f es independiente del tiempo y no hay fuerzas externas, la ecuación de Boltzmann toma la forma

$$\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}}. \quad (33)$$

Multiplicando a ambos lados de esta ecuación por la energía cinética e integrando en momentos obtenemos

$$\int d^3p \frac{p^2}{2m} \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r f = \int d^3p \frac{p^2}{2m} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} = 0, \quad (34)$$

porque la integral en momentos del término de colisiones multiplicado por cualquier cantidad conservada en colisiones (masa, momento o energía cinética) se anula. Como el momento y la posición son variables independientes podemos sacar el gradiente en posiciones fuera de la primera integral, con lo que la ecuación de arriba toma la forma

$$\nabla \cdot \int d^3p \frac{p^2}{2m} \frac{\mathbf{p}}{m} f = 0. \quad (35)$$

La integral que aparece en esta ecuación es la corriente de energía cinética, \mathbf{q} . Por lo tanto, se cumple $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ como queríamos demostrar.

(b) En la aproximación de tiempo de relajación tenemos

$$\delta f = -\tau \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r f_0. \quad (36)$$

Así pues, la condición que se debe cumplir para que la i -ésima componente de la velocidad media se anule es

$$\begin{aligned}
0 = u_i &= \frac{1}{mn} \int d^3p p_i f = \frac{1}{mn} \int d^3p p_i (f_0 + \delta f) = \frac{1}{mn} \int d^3p p_i \delta f \\
&= \frac{-\tau}{mn} \int d^3p p_i \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r f_0 = \frac{-\tau}{mn} \nabla \cdot \int d^3p p_i \frac{\mathbf{p}}{m} f_0 \\
&= \frac{-\tau}{mn} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \int d^3p \frac{p_i p_j}{m} f_0.
\end{aligned} \tag{37}$$

En la última igualdad de la primera línea hemos usado que f_0 es una función par del momento. La integral que aparece en la última línea es la componente ij del tensor de esfuerzos, Θ_{ij} , correspondiente a f_0 . Esta integral sabemos cuánto da,

$$\int d^3p \frac{p_i p_j}{m} f_0 = nkT \delta_{ij}. \tag{38}$$

Reemplazando en (37) obtenemos

$$0 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (nkT) \delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} (nkT) = k \frac{\partial}{\partial x_i} (nT). \tag{39}$$

Por lo tanto, la condición que se debe cumplir para que la velocidad media se anule (es decir, para que se anulen sus tres componentes) es

$$\nabla(nT) = 0 \tag{40}$$

o, en otras palabras, que nT sea constante.

(c) La componente i -ésima de la corriente de energía cinética es

$$\begin{aligned}
q_i &= \int d^3p \frac{p^2}{2m} \frac{p_i}{m} f = \int d^3p \frac{p^2}{2m} \frac{p_i}{m} (f_0 + \delta f) = \int d^3p \frac{p^2}{2m} \frac{p_i}{m} \delta f \\
&= -\tau \int d^3p \frac{p^2}{2m} \frac{p_i}{m} \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r f_0 = -\frac{\tau}{2m^3} \nabla \cdot \int d^3p p^2 p_i \mathbf{p} f_0 \\
&= -\frac{\tau}{2m^3} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \int d^3p p^2 p_i p_j f_0
\end{aligned} \tag{41}$$

En la última igualdad de la primera línea hemos vuelto a usar que f_0 es una función par del momento. La ayuda del enunciado nos dice cuánto vale la última integral, así que tenemos

$$q_i = -\frac{5\tau k^2}{2m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (nT^2) \delta_{ij} = -\frac{5\tau k^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x_i} (nT^2) = -\frac{5\tau nk^2 T}{2m} \frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{42}$$

En la última igualdad hemos usado que nT es constante, como obtuvimos en el ítem anterior. Así pues, efectivamente se cumple que $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$, donde

$$\kappa = \frac{5\tau nk^2 T}{2m}. \tag{43}$$

Nótese que κ es constante (independiente de la posición).

(d) Del ítem (a) sabemos que $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$, y del ítem (c) sabemos que $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$, donde la conductividad térmica κ es una constante. Por lo tanto, la temperatura satisface la ecuación de Laplace, $\Delta T = 0$. Asumiendo que T sólo depende de la distancia x a uno de los extremos del tubo (digamos el que se encuentra a temperatura T_1), la ecuación de Laplace se reduce a

$$T''(x) = 0. \quad (44)$$

El perfil de temperaturas es pues lineal,

$$T(x) = A + Bx, \quad (45)$$

y podemos fijar las constantes A y B usando las condiciones de contorno,

$$T_1 = T(0) = A \quad T_2 = T(L) = T_1 + BL \Rightarrow B = \frac{T_2 - T_1}{L}. \quad (46)$$

En consecuencia,

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x. \quad (47)$$

Un comentario: aunque la situación del problema es estacionaria (nada depende del tiempo), no es de equilibrio porque tenemos un flujo constante de energía a través de los extremos del tubo. Por eso la temperatura no es uniforme.