

# Transición de fase Ising 1D cuántico

21 de junio de 2017

## Índice

<b>1. Consideraciones generales</b>	<b>1</b>
<b>2. Excitaciones en acoplamiento fuerte, débil y transición de fase</b>	<b>4</b>
2.1. Acoplamiento Fuerte . . . . .	4
2.2. Acoplamiento debil . . . . .	5
<b>3. Domain Walls y auto dualidad</b>	<b>7</b>
<b>4. Conclusión</b>	<b>10</b>
<b>5. Referencias</b>	<b>10</b>

La idea de estas notas es poder dejar por escrito lo que hablamos de la dualidad cuántica en el modelo de Ising 1D siendo un poco más explícito que en la clase con algunas cuentas y siendo más acotado que las referencias que van a estar al final.

## 1. Consideraciones generales

La cadena de Ising unidimensional con la que venimos trabajando viene dada por el hamiltoniano:

$$H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^N S_i \quad (1)$$

En donde estamos considerando condiciones de borde periódicas, y en caso de que consideremos condiciones abiertas tendríamos que cambiar el límite superior de la primer suma en (1). Si bien desde Física 4 empezamos a creer la idea de que el Spin es un buen número cuántico que tiene asociado algún operador en el espacio de Hilbert del sistema, el Hamiltoniano (1) no está escrito en términos de dichos operadores. Es decir que los objetos  $S_i$  del mismo no tienen ningún tipo de

problema de conmutación y simplemente pueden tomar valores  $-1, 1$ , y un estado del sistema estará caracterizado por una tira de números:

$$(s_1, s_2, \dots, s_N) = (-1, +1, \dots, +1) \quad (2)$$

Una primera aproximación al problema cuántico sería tomar el Hamiltoniano (1) y promover el cambio:

$$S_i \rightarrow \hat{S}_i \quad (3)$$

Junto con las reglas de conmutación:

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad (4)$$

En donde el símbolo  $\epsilon_{ijk}$  es totalmente anti-simétrico:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ ó } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (3, 2, 1), (1, 3, 2), \text{ ó } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } i = j, \text{ ó } j = k, \text{ ó } k = i \end{cases} \quad (5)$$

Antes de entrar con más detalle en qué significan las relaciones (4) conviene detenerse un segundo a mirar el Hamiltoniano (1), todas las variables de Spin del mismo están en la dirección  $\hat{z}$  por lo que de igual manera el campo magnético que estamos considerando también está aplicado en esa dirección, pero claramente este no es el caso más general. Esto puede verse fácilmente recordando que en el laboratorio podemos poner el campo magnético  $B$  en cualquier eje y el acople del mismo con el Spin se corresponderá a la proyección en alguna base<sup>1</sup>, es decir que el término más general que podemos considerar para el Spin de cada partícula vendrá dado por una interacción del campo electro magnético con el Spin de la forma:

$$H_{int} = -\mu\vec{B} \cdot \hat{S} \quad (6)$$

El caso de interés para la dualidad es cuando tomamos campo magnético transversal, es decir  $\vec{B} = B\hat{x}$  y definimos la intensidad de la interacción  $g = \mu B$ , por lo que el Hamiltoniano (1) toma la forma:

$$H = -J\left(\sum_{i=1}^N \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+1}^z + g \sum_{i=1}^N \hat{S}_i^x\right) \quad (7)$$

Para entender mejor lo que vamos a hacer con este nuevo Hamiltoniano necesitamos entender mejor qué significa cada término. En la red tenemos  $N$  spines que están

---

<sup>1</sup>En caso de que esto todavía haga ruido, siempre se puede pensar que si solo tuviésemos la posibilidad de poner un imán orientado en  $\hat{z}$  igualmente tendríamos la libertad de girar el imán con respecto a los spines de manera de obtener otra proyección arbitraria.

ubicados en lugares  $i$  de la misma, según las reglas de conmutación (4) sabemos que estos son operadores que no conmutan pero no estamos diciendo nada todavía con respecto al lugar de la red en el que está cada spin. La manera correcta de generalizar dichas reglas de conmutación es pedir que spines en lugares distintos de la red (por ejemplo el  $i$  con el  $j$ ) conmuten, es decir:

$$[S_i^\alpha, S_j^\beta] = 2i\delta_{ij}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_i^\gamma \quad (8)$$

En donde ahora  $\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$  nos da la componente correspondiente del Spin mientras que  $i, j$  es el lugar de la red.

Dado que los operadores no conmutan, no admiten una base que los diagonalice simultáneamente por lo que necesitamos saber de que manera actúa el operador  $S^\alpha$  sobre algún autovector de  $S^\beta$ , para ver eso seamos un poco más explícitos con estos operadores. La representación de los mismos en el caso de spin 1/2 es en términos de las matrices de Pauli:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Con estas matrices es un ejercicio (recomendado si nunca lo hicieron) de verificar las relaciones (4). A partir de acá también podemos ver los autovalores y autovectores de  $S_z$ :

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ S_z |\uparrow\rangle &= +|\uparrow\rangle, & S_z |\downarrow\rangle &= -|\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

Una forma conveniente de aprovechar la notación *bra-ket* es escribir los operadores de la forma:

$$\begin{aligned} S_z &= |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \\ S_x &= |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \\ S_y &= -i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow| \end{aligned} \quad (11)$$

Y ahora es fácil ver que sucede cuando actuamos con un operador sobre el autovector del otro, por ejemplo:

$$\begin{aligned} S_x |\uparrow\rangle &= (|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) |\uparrow\rangle \\ &= |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

En donde estamos usando que autovectores de autovalores distintos son ortogonales entre si y que los mismos tienen norma 1. Por otro lado es un ejercicio recomendable

calcular los autovectores de  $S_x$  y escribirlos en términos de los autovectores de  $S_z$ :

$$\begin{aligned} |\rightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \\ |\leftarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \end{aligned} \tag{13}$$

Por último a partir de las expresiones (9) podemos ver que  $\text{Tr}(S_i) = 0$  y  $S_i^2 = \mathbb{I}_2$ .

## 2. Excitaciones en acoplamiento fuerte, débil y transición de fase

Resolver el problema de Ising 1D cuántico significa poder decir cuáles van a ser las energías del sistema y los correspondientes estados. Analizando el Hamiltoniano (7) vemos que se corresponde con un sistema de  $N$  spines cuánticos interactuantes, cómo cada uno de ellos puede tener dos estados posibles la dimensión del espacio de Hilbert será  $2^N$ , es decir que a priori es un problema nada trivial de resolver y puede ser nada trivial de simular dependiendo el valor  $N$  de spines que tengamos.

El Hamiltoniano tiene dos términos independientes que compiten entre sí, el término de interacción a primeros vecinos favorece los estados en los cuales todos los spines están alineados en la dirección  $z$  mientras que el término de interacción con el campo favorece que estén alineados según  $x$ . En un caso genérico donde no tenemos información sobre las intensidades de cada interacción  $J, g$  el sistema elegirá algún estado que sea el de menor energía y a priori no podemos decir mucho más. Sin embargo una buena estrategia para atacar este tipo de problemas y poder ganar un poco más de intuición con la física es mirar los casos límites en los que solo tenemos una de las dos interacciones y luego pensar a la otra como una pequeña perturbación. Si estamos pensando a  $g$  como una interacción del sistema, la jerga usual denomina al caso de  $g \gg 1$  como acoplamiento fuerte y  $g \ll 1$  como acoplamiento débil.

### 2.1. Acoplamiento Fuerte

Si tomamos el límite  $g = \infty$  nuestro sistema queda descrito por el siguiente hamiltoniano efectivo:

$$H_{g \rightarrow \infty} = - \sum_{i=1}^N S_i^x \tag{14}$$

A diferencia del Hamiltoniano original (7) podemos ahora encontrar fácilmente el estado fundamental del sistema. Cómo vimos anteriormente en (8) los spines en

distintos sitios de la red conmutan entre si, por lo que el estado fundamental será simplemente el estado de menor energía para cada spin de la red, es decir:

$$|f\rangle = |\rightarrow, \rightarrow, \dots, \rightarrow\rangle \quad (15)$$

Si pensamos este estado en términos de los autovectores en la dirección  $z$  es fácil ver que no tiene un orden definido:

$$\begin{aligned} |\rightarrow, \rightarrow\rangle &= \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|\uparrow, \uparrow\rangle + |\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle + |\downarrow, \downarrow\rangle) \end{aligned} \quad (16)$$

Es decir que si miramos el sistema tenemos probabilidad  $1/4$  de encontrarlo en alguno de esos 4 estados. Por este motivo este tipo de estados (15) se llaman estados desordenados o también se conoce como el régimen paramagnético.

Si ahora consideramos que  $g \gg 1$  pero finito, tenemos que considerar la perturbación al estado fundamental (15) debido al término:

$$H = -J \sum_{i=1}^N S_i^z S_{i+1}^z \quad (17)$$

La manera correcta de hacer esto sería hacer teoría de perturbaciones degeneradas con esta interacción y estudiar el sistema. Sin embargo es fácil ver que la perturbación de más baja energía se corresponderá simplemente con cambiar la orientación de algún spin:

$$|n\rangle = |\rightarrow, \rightarrow, \dots, \leftarrow, \rightarrow, \dots, \rightarrow\rangle \quad (18)$$

Es decir que en el caso de acoplamiento fuerte el sistema puede describirse como spines alineados en la dirección  $x$  cuyos estados excitados se corresponden con invertir un spin.

## 2.2. Acoplamiento debil

En el otro caso límite tomamos que  $g = 0$  por lo que ahora el sistema vendrá dado por:

$$H_{g=0} = -J \sum_{i=1}^N S_i^z S_{i+1}^z \quad (19)$$

En este caso la menor energía que puede tomar el sistema será  $E_0 = -JN$ , es decir que el estado fundamental se corresponde con:

$$|f\rangle = |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow\rangle \text{ ó } |f\rangle = |\downarrow, \downarrow, \dots, \downarrow\rangle \quad (20)$$

En este caso vemos que el estado fundamental del sistema si tiene un orden, por eso en este límite el sistema estará en un estado ordenado o Ferromagnético<sup>2</sup>.

Para analizar el caso en el que  $g \ll 1$  pero es finito nuevamente podemos pensar al otro término cómo una interacción:

$$H = -g \sum_{i=1}^N S_i^x \quad (21)$$

Nuevamente lo correcto sería hacer perturbaciones pero ya vimos previamente que el spin en  $x$  simplemente nos invierte el spin en  $z$ ,  $S_j^x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ , sin embargo si nosotros tomamos un solo cambio tendríamos:

$$|n\rangle = |\uparrow\uparrow \cdot \downarrow \cdot \uparrow \cdots \uparrow\rangle \quad (22)$$

Estaríamos generando dos interacciones en el sistema, es decir que  $\Delta E = 4J$ , pero esta no es la excitación de menor energía ya que podríamos invertir todos los spines a partir de un punto dado de la red, es decir<sup>3</sup>:

$$|n\rangle = |\uparrow\uparrow \cdot \downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle \quad (23)$$

En cuyo caso tendríamos simplemente  $\Delta E = 2J$ . Este tipo de estados se conoce como *domain walls* ya que a partir de algún lugar  $j$  de la red pasamos de tener todos los spines en una orientación la contraria. En el caso en que estemos en  $g = 0$  estas *domain walls* están localizadas en la red, pero si aplicamos (21) vemos que obtenemos:

$$S_{j+1}^x |\cdots \uparrow\uparrow_j \cdot \downarrow_{j+1}\downarrow \cdots\rangle = |\cdots \uparrow\uparrow_j \uparrow_{j+1} \cdot \downarrow \cdots\rangle \quad (24)$$

Desde acá podemos ver que el término paramagnético (21) actúa sobre los estados como un término cinético, es decir que *mueve* el *domain wall* un lugar en la red, esto nos da la pauta de que los grados de libertad correctos para describir los estados de baja energía no son los spines sino que son los *domain wall*. Por otro lado, comparando el comportamiento del sistema en acoplamiento fuerte y débil vemos que dependiendo del valor de  $g$  el estado fundamental se comportará de manera muy distinta, vamos a tener un régimen de desorden en donde hay una simetría en el estado fundamental y por otro lado también tendremos el régimen ordenado en el cual la simetría está rota.

<sup>2</sup>En este límite también se dice que hay una ruptura espontánea de la simetría, eso puede verse fácilmente a partir del Hamiltoniano original (7) en donde vemos que el sistema es invariante frente al cambio  $S_j^z \rightarrow SS_j^z S^\dagger = -S_j^z$ ,  $S_j^x \rightarrow SS_j^x S^\dagger = +S_j^x$ , en el caso en que  $g = 0$  vemos que si actuamos sobre el estado fundamental con esta transformación la misma no es de simetría mientras que para el caso en que  $g = \infty$  si.

<sup>3</sup>Notar que estamos usando condiciones de contorno abiertas, ya que en caso de sean periódicas obtendríamos el mismo  $\Delta E$  que con un solo flip.

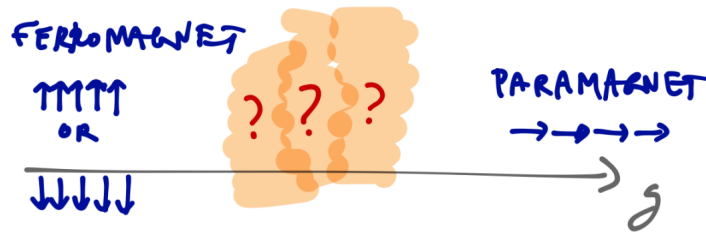


Figura 1: Esquema de los regimenes del sistema para los distintos valores de  $g$ . Cortesía de las Lectures de McGreevy

Todo esto nos sugiere que tiene que existir algún valor de  $g$  para el cuál el sistema pasa de estar en el régimen ordenado al régimen desordenado. Este valor de la constante es efectivamente un punto en donde el sistema tiene una transición de fase, pero acá es importante remarcar que esta transición de fase es distinta a la que estamos viendo en la práctica ya que no es una transición en los valores medios de las magnitudes termodinámicas del sistema en cuestión si no que es una transición para el estado fundamental de un sistema cuántico.

### 3. Domain Walls y auto dualidad

En acoplamiento débil ( $g \ll 1$ ) vimos que el sistema parece describirse en términos de *domain walls*, para ver que esto es efectivamente cierto deberíamos chequear que tenemos una relación uno a uno entre los estados en términos de spines y los *domain walls*. Un estado del sistema corresponde con decir en que estado de spin se encuentra cada lugar de la red, es decir  $(S_1, S_2, \dots, S_N)$ , por otro lado si buscamos describir todo en términos de estas nuevas excitaciones necesitaríamos decir en que lugar de la red se encuentran y por otro lado el primer spin, con estos dos datos obtenemos tenemos una relación directa entre ambas descripciones.

La pregunta ahora se reduce a qué conjunto de operadores es el que mejor describe los *domain walls*. De manera análoga a lo que hicimos con los spines lo que vamos a necesitar va a ser un operador que *mida* si hay o no un domain wall en el lugar  $j$ , y otro que cree un domain wall en el lugar  $j$ .

A partir de la forma del estado (23) vemos que el lugar donde se separa un dominio del otro no se corresponde con ningún lugar real de la red, si no que parece ser un punto que está en el medio de dos lugares  $i, i + 1$ . Esto nos permite definir una *red dual* que esta ubicada justo en el medio de los puntos de la red original, es decir: La propuesta para dichos operadores será:

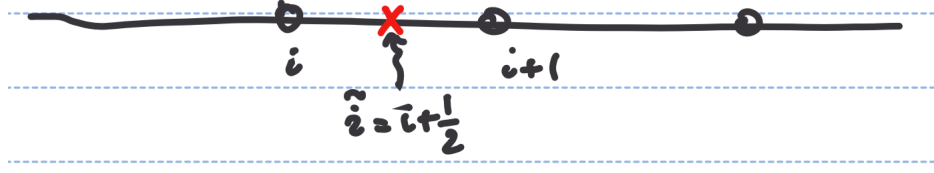


Figura 2: Esquema de la red dual.

- Para medir el domain wall:

$$\tau_i^x = S_{i-1/2}^z S_{i+1/2}^z \quad (25)$$

Para entender primero la notación interpretemos los índices, el operador  $\tau$  tiene un índice  $\tilde{i}$  es decir que actúa sobre la red dual, y los operadores  $S^z$  están definidos en el lugar  $\tilde{i} \pm 1/2$  es decir que se paran en un lugar de la red dual y se mueven un medio para atrás o para adelante volviendolos a ubicar en la red original en donde los operadores  $S^z$  están definidos. Para entender qué hace este operador agarremos 2 spines en el lugar  $i, i+1$  y el punto en el medio de la red dual definido según  $\tilde{i} = i + 1/2$ , el operador  $\tau$  se va a parar en este punto y va a mirar los spines que se encuentran adelante y atrás, supongamos que tanto  $i$  como  $i+1$  se encuentran en el estado  $|\uparrow\rangle$  entonces tendremos:

$$\tau_i^x |\uparrow_i \uparrow_{i+1}\rangle = S_i^z |\uparrow_i\rangle S_{i+1}^z |\uparrow_{i+1}\rangle = + |\uparrow_i \uparrow_{i+1}\rangle \quad (26)$$

Si en cambio tomamos que  $i$  e  $i+1$  están en estados opuestos (es decir que hay un domain wall en  $\tilde{i}$ ):

$$\tau_i^x |\uparrow_i \downarrow_{i+1}\rangle = S_i^z |\uparrow_i\rangle S_{i+1}^z |\downarrow_{i+1}\rangle = - |\uparrow_i \downarrow_{i+1}\rangle \quad (27)$$

Es decir que el operador  $\tau_i^z$  tiene autovalores  $\pm 1$  en donde el  $+$  se corresponde con no tener domain wall en  $\tilde{i}$  y  $-$  con tener. Esto puede verse de forma más clara en la siguiente imagen:

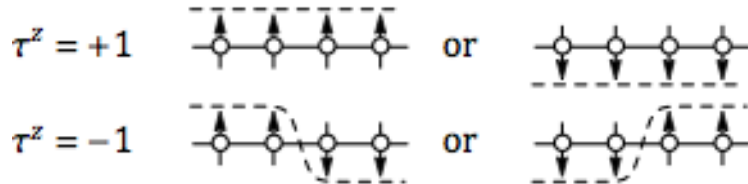


Figura 3: Representación de cómo actúa el operador  $\tau_i^z$ .



- Para crear un domain wall:

$$\tau_{\tilde{i}}^z = \prod_{i>\tilde{i}} S_i^x \quad (28)$$

Este operador se para en un lugar de la red dual  $\tilde{i}$  y mira todos los lugares de la original adelante de dicho punto actuando con el operador  $S^x$  es decir que si empezamos con un estado:

$$\begin{aligned} \tau_{\tilde{i}}^z |\uparrow \cdots \uparrow_{\tilde{i}} \uparrow \cdots \uparrow\rangle &= |\uparrow \cdots \uparrow_{\tilde{i}}\rangle \otimes S_{i+1}^x |\uparrow\rangle \cdots \otimes S_N^x |\uparrow\rangle \\ &= |\uparrow \cdots \uparrow_{\tilde{i}} \downarrow \cdots \downarrow\rangle \end{aligned} \quad (29)$$

Es decir que creo un domain wall en el lugar  $\tilde{i}$ . De igual manera se puede ver los autovalores son  $\pm 1$ . Con todo esto podemos ver varias propiedades de estos operadores:

1.  $(\tau_{\tilde{i}}^x)^2 = \mathbb{I}$
2.  $(\tau_{\tilde{i}}^z)^2 = \mathbb{I}$
3.  $\tau_{\tilde{i}}^x \tau_{\tilde{i}}^z = -\tau_{\tilde{i}}^z \tau_{\tilde{i}}^x$

Es decir que estos operadores también son matrices de Pauli. Esto nos lleva a pensar que podríamos escribir el Hamiltoniano original (7) en términos de estos nuevos operadores pero para eso necesitamos obtener la transformación inversa:

$$\begin{aligned} \tau_{i+1/2}^x &= S_i^z S_{i+1}^z \\ \tau_{\tilde{i}}^z \tau_{\tilde{i}+1}^z &= S_i^x \end{aligned} \quad (30)$$

Con esto podemos escribir el Hamiltoniano (7) cómo <sup>4</sup>

$$\begin{aligned} H &= -J \left( \sum_{i=1}^N \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+1}^z + g \sum_{i=1}^N \hat{S}_i^x \right) \\ &= -J \left( \sum_{\tilde{i}=1}^N \tau_{\tilde{i}}^x + g \sum_{\tilde{i}=1}^N \tau_{\tilde{i}}^z \tau_{\tilde{i}+1}^z \right) \\ H &= -Jg \left( \frac{1}{g} \sum_{\tilde{i}=1}^N \tau_{\tilde{i}}^x + \sum_{\tilde{i}=1}^N \tau_{\tilde{i}}^z \tau_{\tilde{i}+1}^z \right) \end{aligned} \quad (31)$$

Podemos ver que el Hamiltoniano es el mismo que con el que habíamos empezado siempre que tomemos el cambio en las constantes de acoplamiento:

$$\begin{aligned} g &\rightarrow \frac{1}{g} \\ J &\rightarrow Jg \end{aligned} \quad (32)$$

---

<sup>4</sup>Para obtener la expresión de  $S_i^x$  basta hacer la multiplicación explícita de los operadores  $\tau$  y recordar que los operadores para lugares distintos de la red conmutan.

Esto lo que nos está diciendo es que encontramos las buenas coordenadas para describir el sistema en acoplamiento débil. A partir de (32) podemos ver que existe un valor de  $g$  para el cuál el sistema es dual a si mismo, este valor es  $g = 1$  y es exactamente el punto en el que sucede la transición de fase cuántica.

## 4. Conclusión

Analizando el problema de Ising 1D cuántico vimos que había una transición de fase entre dos regímenes distintos para el estado fundamental del sistema. Uno de ellos es un regimen paramagnético o desordenado que preserva una simetría  $\mathbb{Z}_2$  mientras que el otro es un régimen ferromagnético u ordenado en donde la simetría está espontáneamente rota. Analizando los comportamientos límites encontramos que en el régimen de acoplamiento débil el sistema debe describirse en términos de excitaciones fundamentales, que son distintas a los spines, llamadas domain walls. Y escribiendo el Hamiltoniano en términos de estas variables encontramos que el valor de  $g$  en donde sucede la transición de fase es el valor que hace que la teoría sea dual a si misma, es decir  $g_c = 1$ .

Sin embargo el problema todavía está lejos de estar resuelto, simplemente pudimos determinar de manera exacta el punto en el que sucede la transición de fase. Para resolver el problema de manera exacta nos podemos preguntar si existe algún conjunto de coordenadas que me permitan describir tanto a acoplamiento débil los domain walls como a acoplamiento fuerte los spines. Este cambio de coordenadas resulta ser una combinación de los operadores que encontramos acá y en ese caso el problema se reduce a una teoría libre de fermiones sin spin.

Uno se podría preguntar por qué esto permite resolver el problema, una justificación intuitiva es que una teoría libre solamente va a tener términos cinéticos para las variables y en general este tipo de problemas son los que sabemos resolver. Por otro lado si queremos entender por qué el sistema de spines puede describirse en términos de fermiones se puede ganar un poco de intuición si relacionamos los estados de spin  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle$  con estados de ocupación del fermión 0 ó 1. Igualmente hay mucho más para decir de estos temas y se puede consultar la bibliografía que sigue acá abajo.

## 5. Referencias

- [1] <https://sites.google.com/site/ashvinvish/phy250>
- [2] <http://mcgreevy.physics.ucsd.edu/s14/239a-lectures.pdf>
- [3] <http://indico.ictp.it/event/7953/other-view?view=ictptimetable>