Resolución del segundo parcial de Física Teórica 3
Primer cuatrimestre de 2017

Problema 1

(a) A temperatura cero, el número de partículas con espín paralelo al campo es igual al número de estados monoparticulares con espín paralelo al campo y energía menor o igual a la de Fermi,

$$N_\uparrow = \int_{\epsilon_\uparrow(p,q)\leq\epsilon_F} \frac{d^dq d^dp}{h^d}, \tag{1}$$

donde

$$\epsilon_\uparrow(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - \mu B \tag{2}$$

es la energía del estado con espín paralelo al campo, momento p y posición q (m es la masa del electrón). Definiendo las nuevas variables

$$P = \frac{p}{\sqrt{2m}} \qquad Q = \sqrt{\frac{m}{2}}\omega q, \tag{3}$$

podemos reescribir la ecuación (1) en términos del volumen de una esfera en un espacio de $2d$ dimensiones, que calculamos usando la ayuda (sacando la dependencia del volumen en el radio por análisis dimensional),

$$N_\uparrow = \left(\frac{2}{h\omega}\right)^d \int_{P^2+Q^2\leq\epsilon_F+\mu B} d^dQ d^dP = \frac{1}{d!}\left(\frac{\epsilon_F+\mu B}{\hbar\omega}\right)^d. \tag{4}$$

El mismo argumento nos da el número de partículas con espín antiparalelo al campo, sólo que ahora tenemos que tener en cuenta que el radio de la esfera puede ser negativo,

$$N_\downarrow = \left(\frac{2}{h\omega}\right)^d \int_{P^2+Q^2\leq\epsilon_F-\mu B} d^dQ d^dP = \begin{cases} \frac{1}{d!}\left(\frac{\epsilon_F-\mu B}{\hbar\omega}\right)^d & \text{si } \epsilon_F > \mu B \\ 0 & \text{si } \epsilon_F \leq \mu B. \end{cases} \tag{5}$$

Ahora, si todos los espines apuntan en la dirección del campo tenemos $N = N_\uparrow$ y $\epsilon_F \leq \mu B$. Estas dos condiciones implican

$$N \leq \frac{1}{d!}\left(\frac{2\mu B}{\hbar\omega}\right)^d \quad \Leftrightarrow \quad \mu B \geq \frac{\hbar\omega}{2}(Nd!)^{1/d}. \tag{6}$$

Por lo tanto, el campo tiene que ser suficientemente intenso para que todos los espines se orienten paralelos a él, lo cual no es sorprendente.

(b) De (4) y (5) vemos que, a $B = 0$, el número de partículas total se relaciona con la energía de Fermi por la ecuación

$$N = N_\uparrow + N_\downarrow = \frac{2}{d!}\left(\frac{\epsilon_F}{\hbar\omega}\right)^d, \tag{7}$$

y por lo tanto

$$\epsilon_F = \hbar\omega \left(\frac{Nd!}{2}\right)^{1/d} \equiv \epsilon_F^0. \tag{8}$$

(c) Para B lo suficientemente chico, la magnetización del sistema es

$$M = \mu(N_\uparrow - N_\downarrow) = \frac{\mu}{d!(\hbar\omega)^d}\left[(\epsilon_F + \mu B)^d - (\epsilon_F - \mu B)^d\right]. \tag{9}$$

Por lo tanto, la susceptibilidad magnética es

$$\chi = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{B=0} = \frac{2\mu^2 d}{d!(\hbar\omega)^d}(\epsilon_F^0)^{d-1} = \frac{N\mu^2 d}{\epsilon_F^0}. \tag{10}$$

Nótese que al derivar la ecuación (9) aparecen derivadas de la energía de Fermi, pero éstas se cancelan. En el contexto de la estadística clásica, la susceptibilidad magnética diverge a temperatura cero porque, en el estado fundamental, todos los espines se alinean con el campo magnético independientemente de la intensidad de este último. Acá no pasa eso debido al principio de exclusión de Pauli: si todos los electrones tienen el espín apuntando en la misma dirección entonces tienen que encontrarse en estados vibracionales distintos, y ésa es una configuración energéticamente desfavorable para el sistema cuando el campo magnético es chico. En el estado fundamental, pues, hay sólo un ligero desbalance entre el número de espines apuntando en la dirección del campo y el número de espines que apuntan en la dirección opuesta, y por eso la susceptibilidad magnética es finita.

Problema 2

(a) En términos de la temperatura T, el volumen V y la fugacidad z, el logaritmo de la función de partición grancanónica es

$$\begin{aligned}
\log \mathcal{Z} &= -\int \frac{dyd^2qd^3p}{h^3}\log\left[1 - ze^{-\beta(\frac{p^2}{2m}+mgy)}\right] \\
&= -\frac{A}{h^3}\int dyd^3p\log\left(1 - ze^{-\beta mgy}e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right) \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L dy\left[-\frac{V}{h^3}\int d^3p\log\left(1 - ze^{-\beta mgy}e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right)\right],
\end{aligned} \tag{11}$$

donde y representa la altura y A el área de la base del recipiente. En la última línea de esta ecuación, el factor entre paréntesis cuadrados es la función de partición grancanónica de un gas de bosones de spin 0 sin gravedad, evaluada a la fugacidad efectiva $ze^{-\beta mgy}$, y por lo tanto

$$\log \mathcal{Z} = \frac{V}{\lambda^3}\frac{1}{L}\int_0^L dy\, g_{5/2}(ze^{-\beta mgy}). \tag{12}$$

A este resultado habría que agregarle la contribución del estado fundamental, $-\log(1-z)$, pero en lo que sigue nunca nos vamos a interesar por temperaturas inferiores a la crítica, así que este término siempre va a ser despreciable.

(b) Calculemos el número de partículas a partir de la función de partición,

$$
\begin{aligned}
N = z\frac{\partial}{\partial z}\log \mathcal{Z} &= \frac{V}{\lambda^3}\frac{1}{L}\int_0^L dy\, g'_{5/2}(ze^{-\beta mgy})ze^{-\beta mgy} \\
&= \frac{V}{\lambda^3}\frac{1}{L}\int_0^L dy\, g_{3/2}(ze^{-\beta mgy}).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

A la temperatura crítica tenemos $z = 1$, así que

$$
\lambda_c^3 = v\frac{1}{L}\int_0^L dy\, g_{3/2}(e^{-\beta_c mgy}), \tag{14}
$$

donde $v = V/N$ es el volumen por partícula. Ahora, el integrando de arriba toma su valor máximo en el límite inferior de integración (porque la función $g_{3/2}$ es creciente), y por lo tanto

$$
\lambda_c^3 < v\frac{1}{L}g_{3/2}(1)L = v\zeta(3/2) = (\lambda_c^0)^3. \tag{15}
$$

Como la longitud de onda térmica es una función decreciente de la temperatura, concluimos que $T_c > T_c^0$, como queríamos demostrar. Este resultado se puede entender de la siguiente forma. Pensemos sólo en el movimiento en la dirección vertical, y. En ausencia de gravedad, las partículas están sometidas a un pozo cuadrado de potencial, cuyas paredes corresponden a las tapas del cilindro y están ubicadas en $y = 0$ e $y = L$. La gravedad hace que el fondo del pozo se incline (adquiere una pendiente mg). Así pues, en presencia de gravedad el potencial se vuelve más "estrecho" y, en consecuencia, los niveles de energía se separan. Por lo tanto, hay menos estados de baja energía y se vuelve más probable que se pueble el fundamental. Otra explicación más sencilla (aunque menos completa) es que en presencia de gravedad la densidad se vuelve más alta cerca de la base del recipiente, y por eso el gas puede condensar a temperaturas más altas.

(c) Dado que $T_c > T_c^0$, si se cumple $mgL \ll kT_c^0$ entonces también se cumple $mgL \ll kT_c$. Por lo tanto, $\beta_c mgy \ll 1$ en todo el dominio de integración de (14), así que, usando la ayuda, podemos podemos reescribir esa ecuación en la forma

$$
\begin{aligned}
\lambda_c^3 &\simeq v\frac{1}{L}\int_0^L dy\left[\zeta(3/2) - 2\sqrt{\pi\beta_c mgy}\right] = v\left[\zeta(3/2) - \frac{4}{3}\sqrt{\pi\beta_c mgL}\right] \\
&= (\lambda_c^0)^3\left[1 - \frac{4}{3\zeta(3/2)}\sqrt{\pi\beta_c mgL}\right].
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Dado que $\lambda^3 \propto T^{-3/2}$, esta ecuación implica

$$
T_c \simeq T_c^0\left[1 + \frac{8}{9\zeta(3/2)}\sqrt{\pi\beta_c mgL}\right]. \tag{17}
$$

Podemos reemplazar el factor β_c que aparece en el lado derecho de esta ecuación por β_c^0, porque las correcciones son de orden superior, así que obtenemos

$$
T_c \simeq T_c^0\left[1 + \frac{8}{9\zeta(3/2)}\sqrt{\pi\beta_c^0 mgL}\right]. \tag{18}
$$

Problema 3

(a) En el ensamble canónico, la probabilidad de una configuración de los N espines es

$$
\begin{aligned}
P(s_1, s_2, \ldots, s_N) &= \frac{1}{Q} e^{-\beta H(s_1, s_2, \ldots, s_N)} = \frac{1}{Q} e^{K \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}} \\
&= \frac{1}{Q} \prod_{i=1}^N e^{K s_i s_{i+1}} = \frac{1}{Q} \prod_{i=1}^N q_{s_i s_{i+1}} = \frac{1}{Q} q_{s_1 s_2} \ldots q_{s_N s_1}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Reescribamos este resultado de forma conveniente, colocando el último factor en primer lugar y agrupando los factores de l en l:

$$
P(s_1, \ldots, s_N) = \frac{1}{Q} (q_{s_N s_1} \ldots q_{s_{l-1} s_l})(q_{s_l s_{l+1}} \ldots q_{s_{2l-1} s_{2l}}) \ldots (q_{s_{N-l} s_{N-l+1}} \ldots q_{s_{N-1} s_N}).
$$

La probabilidad de una configuración de los espines cuyas posiciones son múltiplos de l se obtiene sumando sobre todas las configuraciones de los espines cuyas posiciones no son múltiplos de l. Es decir, para cada factor entre paréntesis tenemos que sumar sobre todos los índices excepto el primero y el último. Por lo tanto,

$$
P(s_l, s_{2l}, \ldots, s_N) = \frac{1}{Q} (q^l)_{s_N s_l} (q^l)_{s_l s_{2l}} \ldots (q^l)_{s_{N-l} s_N}, \tag{20}
$$

o, colocando el primer factor en último lugar,

$$
P(s_l, s_{2l}, \ldots, s_N) = \frac{1}{Q} (q^l)_{s_l s_{2l}} \ldots (q^l)_{s_N s_l}. \tag{21}
$$

Comparando esta ecuación con (19), vemos que los espines ubicados en posiciones múltiplos de l se comportan como una cadena de Ising con matriz de transferencia q' tal que

$$
f q' = q^l \tag{22}
$$

para algún número f. Para encontrar la constante de acoplo adimensional K' correspondiente a esta nueva cadena, busquemos los autovalores de la matriz de transferencia tal como sugiere el ejercicio,

$$
0 = \det(q - \lambda \mathbb{I}) = (e^K - \lambda)^2 - e^{-2K} = \lambda^2 - 2e^K \lambda + e^{2K} - e^{-2K}. \tag{23}
$$

La solución de esta ecuación es

$$
\lambda = e^K \pm \sqrt{e^{2K} - e^{2K} + e^{-2K}} = e^K \pm e^{-K} \equiv \lambda_\pm. \tag{24}
$$

Ahora, la ecuación (22) implica $f \lambda'_\pm = \lambda_\pm^l$, y por lo tanto

$$
2f \cosh K' = (2 \cosh K)^l \qquad 2f \sinh K' = (2 \sinh K)^l. \tag{25}
$$

Sacando el cociente entre ambas ecuaciones obtenemos $\tanh K' = (\tanh K)^l$, como queríamos demostrar.

(b) En términos de la variable $x \equiv \tanh K$, la ecuación del grupo de renormalización toma una forma muy simple,

$$
x' = x^l. \tag{26}
$$

Los puntos fijos, pues, se obtienen resolviendo la ecuación $x = x^l$ o, equivalentemente, $x(1 - x^{l-1}) = 0$. Como sólo nos interesan las soluciones no negativas (porque K es no negativo), vemos que los únicos puntos fijos son $x = 0$ y $x = 1$, que corresponden respectivamente a $T = \infty$ y $T = 0$. En cuanto a la estabilidad, notemos que para $K \in (0, \infty)$ se tiene $x \in (0, 1)$, y que dentro de este intervalo se cumple $x' = x^l < x$. Por lo tanto, concluimos sin necesidad de hacer más cuentas que el punto fijo $x = 0$ ($T = \infty$) es estable, y el punto fijo $x = 1$ ($T = 0$) es inestable.