Primer parcial de Física Teórica 3
14/5/18

Problema 1

Considere una cadena lineal formada por N eslabones distinguibles. Cada eslabón puede tener dos longitudes, a y b. Un eslabón de longitud a puede tener dos energías, 0 y ϵ. Los eslabones de longitud b tienen energía 0. La cadena tiene longitud total L y se encuentra en equilibrio.

(a) Calcule el número n_a de eslabones de longitud a. Calcule también el número n_ϵ de eslabones con energía ϵ en función de la energía total E de la cadena.

(b) En el ensamble microcanónico, calcule la entropía de la cadena en función de E.

(c) Calcule la energía y la tensión de la cadena en función de su temperatura. Discuta su resultado para la energía.

Problema 2

Considere un gas de N partículas de masa m. Las partículas pueden moverse libremente en la dirección z, entre dos placas paralelas separadas por una distancia L. En cambio, su movimiento en el plano xy está gobernado por un potencial armónico de frecuencia angular ω. El movimiento en la dirección z se puede tratar clásicamente, pero el movimiento en el plano xy debe ser tratado cuánticamente, de manera que las energías de una partícula tienen la forma

$$\epsilon = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega(n_x + n_y + 1),$$

con $n_x, n_y \in \mathbb{N}$. Las partículas son indistinguibles, pero trataremos esa indistinguibilidad de forma aproximada mediante el conteo de Boltzmann. El gas se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Calcule la función de partición canónica del gas.

(b) Calcule la energía del gas, y discuta los límites de temperaturas altas y bajas.

(c) Calcule el calor específico y grafíquelo cualitativamente en función de T (*ayuda:* $\coth' x = -1/\sinh^2 x$).

Problema 3

Si pinchamos un globo lleno de helio, el helio se difunde por el aire. Vamos a estudiar este proceso usando la ecuación de Boltzmann. Las moléculas del aire son mucho más masivas que los átomos de helio, así que, en primera aproximación, podemos modelar el proceso como el de un gas (el helio) que se difunde por una red de partículas fijas. En estas condiciones, la distribución de Maxwell-Boltzmann local tiene la forma

$$f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{n(\boldsymbol{r}, t)}{[2\pi mkT(\boldsymbol{r}, t)]^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT(\boldsymbol{r},t)}},$$

donde n es la densidad, T la temperatura y m la masa de una partícula del gas (no aparece la velocidad media $\boldsymbol{u}$ porque el impulso de las partículas del gas no se conserva en las colisiones con la red). Suponga que no hay fuerzas externas, es decir, ignore los efectos del campo gravitatorio terrestre.

(a) Para cualquier función de distribución f que satisface la ecuación de Boltzmann, pruebe que n y $\boldsymbol{u}$ se relacionan por la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{u}) = 0.$$

(b) Calcule las componentes $u_i(\boldsymbol{r}, t)$ de la velocidad media del gas en la aproximación de tiempo de relajación, suponiendo que T es constante. A partir de su resultado muestre que n satisface la ecuación de difusión,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n,$$

y encuentre el valor del coeficiente de difusión D.

(c) Una solución de la ecuación de difusión es

$$n(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\alpha}{t^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}$$

para $t > 0$, donde α es una constante. Calcule α en términos del número total N de partículas del gas. Grafique cualitativamente esta solución en función de r en dos instantes distintos, t_1 y t_2.