Problema 1

(a) $L = n_a a + n_b b = n_a a + (N - n_a) b$

$= n_a (a-b) + Nb$

$$\Rightarrow \boxed{n_a = \frac{L - Nb}{a-b}}$$

$$E = n_\epsilon \epsilon \Rightarrow \boxed{n_\epsilon = \frac{E}{\epsilon}}$$

(b) El vínculo de la energía y la longitud nos dice cuántos eslabones tienen longitud a (n_a) y, de ésos, cuántos tienen energía ϵ (n_ϵ).

Para determinar el microestado del sistema deberíamos decir cuáles son los eslabones con longitud a y, de ésos, cuáles tienen energía ϵ.

$\Rightarrow$ # microestados = # formas de elegir cuáles son los eslabones con longitud a y, de ésos, cuáles tienen energía ϵ.

$$\Rightarrow \quad \Omega = \binom{N}{n_a}\binom{n_a}{n_\epsilon} = \frac{N!}{(N-n_a)!\, n_\epsilon!\, (n_a - n_\epsilon)!}$$

$$\Rightarrow \quad S = k \log \Omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stirling}}}{=} \boxed{\begin{aligned} & k \Big\{ N \log N - (N-n_a)\log(N-n_a) \\ & \quad - n_\epsilon \log n_\epsilon - (n_a - n_\epsilon)\log(n_a - n_\epsilon) \Big\} \\ & \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{S} \end{aligned}}$$

Queda expresada en función de E, L una vez reemplazamos el resultado del ítem (a).

(c) $$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \underset{\substack{\uparrow \\ (a)}}{=} \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial S}{\partial n_\epsilon}$$

$$= \frac{k}{\epsilon}\left\{ -\log n_\epsilon - \cancel{1} + \log(n_a - n_\epsilon) + \cancel{1} \right\}$$

$$= \frac{k}{\epsilon} \log \frac{n_a - n_\epsilon}{n_\epsilon} = \frac{k}{\epsilon} \log\left(\frac{n_a}{n_\epsilon} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \beta\epsilon = \log\left(\frac{n_a}{n_\epsilon} - 1\right) \Rightarrow \frac{n_a}{n_\epsilon} - 1 = e^{\beta\epsilon}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_a}{n_\epsilon} = 1 + e^{\beta\epsilon}$$

$$\Rightarrow \quad n_\epsilon = \frac{n_a}{1+e^{\beta\epsilon}} \quad \Rightarrow \quad E = n_\epsilon \, \epsilon = \frac{n_a \, \epsilon}{1+e^{\beta\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E \underset{(a)}{\uparrow}= \frac{L - Nb}{a-b} \, \frac{\epsilon}{1+e^{\beta\epsilon}}}$$

La energía total es el # de eslabones con longitud a (que está fijado por la longitud total de la cadena) por el valor medio de la energía de un eslabón de longitud a,

$$\frac{\epsilon \, e^{-\beta\epsilon}}{1+e^{-\beta\epsilon}} = \frac{\epsilon}{1+e^{\beta\epsilon}}$$

↑ Valor medio de la energía de un eslabón de longitud a en el canónico.

$$-\frac{f}{T} = \frac{\partial S}{\partial L} \underset{(a)}{\uparrow}= \frac{1}{a-b} \, \frac{\partial S}{\partial n_a}$$

$$= \frac{k}{a-b} \left\{ \log(N - n_a) + \cancel{1} - \log(n_a - n_\epsilon) - \cancel{1} \right\}$$

$$\Longrightarrow \quad f = \frac{kT}{a-b} \log \frac{n_a - n_\epsilon}{N - n_a}$$

$$= \frac{kT}{a-b} \log \frac{\frac{L-Nb}{a-b} - \frac{L-Nb}{a-b}\frac{1}{1+e^{\beta\epsilon}}}{N - \frac{L-Nb}{a-b}}$$

$$N - \frac{L-Nb}{a-b} = \frac{Na - \cancel{Nb} - L + \cancel{Nb}}{a-b} = \frac{Na - L}{a-b}$$

$$= \frac{kT}{a-b} \log \frac{(L-Nb)\left(1 - \frac{1}{1+e^{\beta\epsilon}}\right)}{Na - L}$$

$$= \frac{kT}{a-b} \log \frac{(L-Nb)\frac{e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}}{Na - L}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f = \frac{kT}{a-b} \log \frac{(L-Nb)\, e^{\beta\epsilon}}{(Na-L)(1+e^{\beta\epsilon})}}$$

Si $a=b$ f diverge porque no hay forma de estirar o contraer la cadena!

Problema 2

(a) Conteo de Boltzmann $\rightarrow$ $Q = \frac{1}{N!} Q_{dist}$.

Para partículas distinguibles no interactuantes, Q_{dist} factoriza

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{N!} Q_1^N$$

$$Q_1 = \underbrace{\int \frac{dz\, dp_z}{h} \sum_{n_x, n_y = 0}^{\infty}}_{\substack{\text{Suma sobre} \\ \text{estados de una partícula}}} e^{-\beta \left[\frac{p^2}{2m} + \hbar\omega (n_x + n_y + 1) \right]}$$

$$= \underbrace{\left[\int \frac{dz\, dp_z}{h} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \right]}_{= \frac{L}{\lambda}} e^{-\beta\hbar\omega} \Bigg[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n}}_{= \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}} \Bigg]^2$$

$$\left(\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}} \right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{L}{\lambda} e^{-\beta\hbar\omega} \frac{1}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})^2} = \frac{L}{\lambda} \frac{1}{\left(e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \right)^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q_1 = \frac{L}{\lambda} \frac{1}{\left[2 \,\mathrm{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right]^2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{N!} \left\{ \frac{L}{\lambda} \frac{1}{\left[2 \,\mathrm{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right]^2} \right\}^N} \qquad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

(b) $$E = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Q = N \frac{\partial}{\partial\beta} \left\{ \log\lambda + \log\left[\mathrm{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right]^2 \right\}$$

$$= N \frac{\partial}{\partial\beta} \left\{ \frac{1}{2}\log\beta + 2\log\left[\mathrm{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right] \right\}$$

$$= N \left\{ \frac{1}{2\beta} + 2 \frac{\cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{\mathrm{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \frac{\hbar\omega}{2} \right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E = N \left[\frac{kT}{2} + \hbar\omega \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \right]}$$

T alta $\Rightarrow$ β pequeño

$$\Rightarrow E \approx N \left[\frac{kT}{2} + \hbar\omega \frac{1}{\beta\hbar\omega/2} \right]$$

$$= N \left[\frac{kT}{2} + 2kT \right] = \boxed{\frac{5}{2} NkT \approx E}$$

A T alta, $\frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1$
el sistema se comporta
clásicamente $\Rightarrow$ Equipartición
con 5 coords. de espacio
de fase por partícula
que entra en el hamiltoniano
(todas menos z), todas
cuadráticamente.

T baja $\Rightarrow$ β grande

$$\Rightarrow \boxed{E \approx N\hbar\omega}$$ energía del estado fundamental

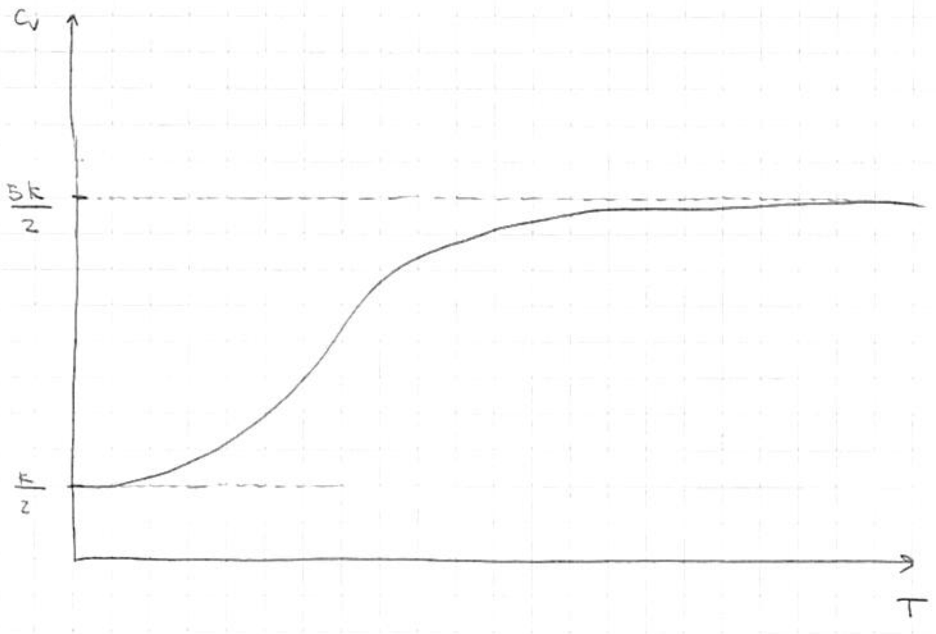
(c) $c_v = \dfrac{C_v}{N} = \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial E}{\partial T} = \dfrac{k}{2} + \hbar\omega \dfrac{d\beta}{dT}\dfrac{d}{d\beta}\coth\left(\dfrac{\beta\hbar\omega}{2}\right)$

$$= \frac{k}{2} + \hbar\omega\left(-\frac{1}{kT^2}\right)\left(-\frac{1}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}\,\frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

$$\boxed{= \frac{k}{2} + 2\left[\frac{\beta\hbar\omega/2}{\operatorname{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}\right]^2 k = c_v}$$

A T bajas tiende exponencialmente a $k/2$.

A T altas tiende a $\frac{k}{2} + 2k = \frac{5k}{2}$ (equipartición)



Problema 3

(a) $$\int d^3p \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} = 0$$ Las colisiones no contribuye a la derivada temporal de n

$$\Rightarrow \int d^3p \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_r f \right] = 0$$

No hay fuerzas externas

$$\int d^3p \, \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3p \, f = \frac{\partial n}{\partial t}$$

$$\int d^3p \, \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_r f = \vec{\nabla} \cdot \int d^3p \, \frac{\vec{p}}{m} f = \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u})$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) = 0}$$

(b) $$u_i = \frac{1}{n}\int d^3p\ \frac{p_i}{m}\, f$$

$$= \frac{1}{n}\Bigg(\underbrace{\int d^3p\ \frac{p_i}{m}\, f_0}_{\substack{= \\ 0 \\ (\text{par por impar})}} + \int d^3p\ \frac{p_i}{m}\, \delta f\Bigg)$$

$$= \frac{1}{n}\int d^3p\ \frac{p_i}{m}\, \delta f$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Despreciando términos } O(\tau^2)}}{=} -\frac{\tau}{n}\int d^3p\ \frac{p_i}{m}\left[\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\cdot\vec{\nabla}_r f_0\right]$$

$$= -\frac{\tau}{n}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int d^3p\ \frac{p_i}{m}\, f_0}_{\substack{= \\ 0}} + \vec{\nabla}\cdot\int d^3p\ \frac{p_i}{m}\frac{\vec{p}}{m}\, f_0\right\}$$

$$= -\frac{\tau}{nm}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\int d^3p\ \frac{p_i p_j}{m}\, f_0}_{\substack{= \\ P_{ij}^{(0)} = nkT\,\delta_{ij}}}$$

$$= -\frac{\tau}{nm}\frac{\partial}{\partial x_i}(nkT) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ constante}}}{=} -\frac{\tau kT}{nm}\frac{\partial n}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u} = -\tau \frac{kT}{nm} \vec{\nabla} n}$$

Reemplazando en la ec. de continuidad,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(-\underbrace{\tau \frac{kT}{m}}_{\text{constante}} \vec{\nabla} n \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n \quad , \quad D = \frac{\tau k T}{m}}$$

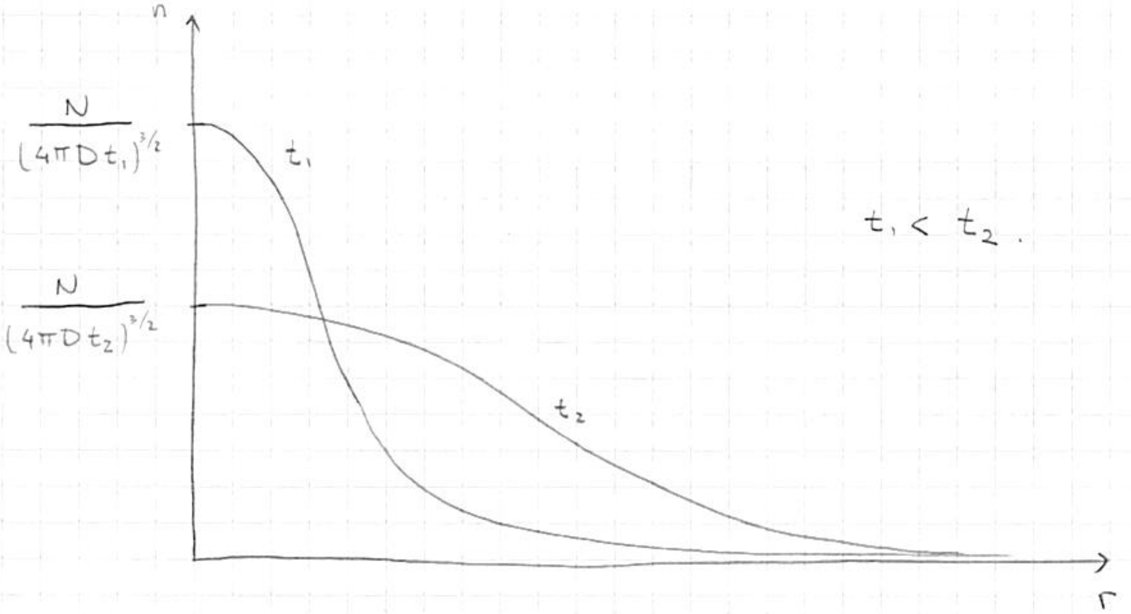
(c) $$N = \int d^3r \; n = \frac{\alpha}{t^{3/2}} \int d^3r \; e^{-\frac{r^2}{4Dt}}$$

$$= \frac{\alpha}{t^{3/2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right]^3$$

$$= \frac{\alpha}{\cancel{t^{3/2}}} \left(4\pi D \cancel{t} \right)^{3/2} = \alpha \left(4\pi D \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{N}{(4\pi D)^{3/2}}}$$

$$\Rightarrow \quad n(\vec{r},t) = \frac{N}{(4\pi D t)^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4Dt}}$$



$t_1 < t_2$.

$\Rightarrow$ El gas se "esparce".