Problema 4, guía 6

Enunciado

Considere un gas ideal de Bose−Einstein cuyas partículas tienen grados de libertad internos. Asuma que sólo es necesario tomar en cuenta el primer nivel interno excitado, con energía ϵ por encima del nivel fundamental de energía 0. Si la temperatura crítica del gas sin grados de libertad internos es T_c^0, muestre que en los límites en que $\epsilon \gg kT_c^0$ y $\epsilon \ll kT_c^0$ la temperatura crítica del gas que sí tiene grados de libertad internos es, respectivamente,

$$\frac{T_c}{T_c^0} \simeq 1 - \frac{2e^{-\epsilon/kT_c^0}}{3\zeta(3/2)} \qquad\qquad \frac{T_c}{T_c^0} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \left[1 + \frac{2^{4/3}}{3\zeta(3/2)} \left(\frac{\pi\epsilon}{kT_c^0}\right)^{1/2}\right].$$

Ayuda:

$$g_\nu\left(e^{-\alpha}\right) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\alpha^{1-\nu}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\zeta(\nu - n)\,\alpha^n.$$

Resolución

Empecemos calculando el número de partículas del gas. Para todo sistema de bosones idénticos no interactuantes se tiene

$$N = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1},$$

donde el índice i etiqueta los estados monoparticulares, ϵ_i es la energía del estado i y z es la fugacidad. En el caso que nos ocupa, un estado monoparticular se especifica dando la posición, el momento y la proyección de espín (lo usual) y, además, el estado del grado de libertad interno. Por lo tanto, tenemos

$$N = g_s \int \frac{d^3q\,d^3p}{h^3} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta p^2/2m} - 1} + g_s \int \frac{d^3q\,d^3p}{h^3} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}e^{\beta p^2/2m} - 1}$$

El primer término es la suma sobre estados en los que el grado de libertad interno está en el nivel fundamental, y el segundo término es la suma sobre estados en los que el grado de libertad interno está en el nivel excitado. El primer término es número de partículas del gas de Bose común, y el segundo también pero con z reemplazado por $ze^{-\beta\epsilon}$, así que, aprovechando lo que ya sabemos, podemos escribir

$$N = g_s \frac{V}{\lambda^3}\left[g_{3/2}(z) + g_{3/2}(ze^{-\beta\epsilon})\right].$$

Ya sabemos que esta ecuación no va a poder cumplirse a cualquier temperatura. Para temperaturas muy bajas va a ser necesario agregar la contribución del estado fundamental y vamos a tener un condensado de Bose-Einstein. La temperatura crítica T_c es precisamente la temperatura más baja a la que esta ecuación se cumple. Ésta se obtiene cuando z alcanza su máximo valor, que en este caso es $z = 1$, así que

$$N = g_s \frac{V}{\lambda_c^3}\left[\zeta(3/2) + g_{3/2}(e^{-\beta_c\epsilon})\right].$$

Despejando λ_c^3 de esta ecuación obtenemos

$$\lambda_c^3 = g_s \frac{V}{N}\zeta(3/2)\left[1+\frac{g_{3/2}(e^{-\beta_c\epsilon})}{\zeta(3/2)}\right] = (\lambda_c^0)^3\left[1+\frac{g_{3/2}(e^{-\beta_c\epsilon})}{\zeta(3/2)}\right].$$

La segunda igualdad surge simplemente de observar que, en ausencia de grados de libertad internos, todo es igual salvo que no tenemos el segundo término entre corchetes. Finalmente, notando que $(\lambda_c/\lambda_c^0)^3 = (T_c/T_c^0)^{-3/2}$, llegamos a la expresión

$$\frac{T_c}{T_c^0} = \left[1+\frac{g_{3/2}(e^{-\beta_c\epsilon})}{\zeta(3/2)}\right]^{-2/3}. \tag{1}$$

Obviamente, aún no hemos despejado T_c, porque hay un β_c en el lado derecho de la igualdad. Sólo podremos hacerlo aproximadamente en los límites de ϵ grande y chico. Aun así, hay algo que ya podemos deducir de esta ecuación: dado que $g_{3/2}(e^{-\beta_c\epsilon})$ está entre 0 y $\zeta(3/2)$, el lado derecho de la igualdad es de orden 1, y por lo tanto T_c es del mismo orden que T_c^0. De hecho, podemos decir algo más: el lado derecho de la igualdad es menor que 1, y por lo tanto $T_c < T_c^0$. ¿Por qué ocurre eso? Al agregar un grado de libertad interno estamos agregando estados al sistema. Así, a temperaturas bajas las partículas tienen más estados de baja energía para elegir y es más difícil que uno de ellos, el fundamental, se pueble macroscópicamente, con lo cual hay que bajar más la temperatura para que eso ocurra. Vamos ahora a estudiar los dos límites que sugiere el enunciado.

Primer caso: $\beta_c^0\epsilon \gg 1$. Dado que, como acabamos de ver, T_c es del mismo orden que T_c^0, en este caso también tenemos $\beta_c\epsilon \gg 1$. Por lo tanto, el argumento de $g_{3/2}$ en (1) es un número muy pequeño, así que podemos aproximar

$$\frac{T_c}{T_c^0} \simeq \left[1+\frac{e^{-\beta_c\epsilon}}{\zeta(3/2)}\right]^{-2/3} \simeq 1-\frac{2e^{-\beta_c\epsilon}}{3\zeta(3/2)}. \tag{2}$$

Seguimos sin haber despejado T_c, porque seguimos teniendo un β_c en el lado derecho de la igualdad. Sin embargo, fijémonos: esta ecuación implica

$$\beta_c \simeq \beta_c^0\left[1+\frac{2e^{-\beta_c\epsilon}}{3\zeta(3/2)}\right] \quad\Rightarrow\quad \beta_c\epsilon \simeq \beta_c^0\epsilon + \underbrace{\beta_c^0\epsilon\frac{2e^{-\beta_c\epsilon}}{3\zeta(3/2)}}_{\equiv\delta}.$$

No sabemos cuánto vale δ, pero sí sabemos que es mucho menor a 1. Por lo tanto,

$$e^{-\beta_c\epsilon} \simeq e^{-\beta_c^0\epsilon-\delta} = e^{-\beta_c^0\epsilon}e^{-\delta} \simeq e^{-\beta_c^0\epsilon}(1-\delta) \simeq e^{-\beta_c^0\epsilon},$$

donde en el último paso hemos tirado un término de segundo orden (producto de dos cantidades pequeñas). Así pues, podemos reemplazar β_c por β_c^0 en el lado derecho de la ecuación (2) y obtenemos finalmente

$$\frac{T_c}{T_c^0} \simeq 1-\frac{2e^{-\beta_c^0\epsilon}}{3\zeta(3/2)}, \tag{3}$$

que es lo que el enunciado nos pedía demostrar. Fijémonos que, en este caso, la temperatura crítica disminuye muy poco respecto al caso sin grados de libertad internos. Claro, porque al tener ϵ grande el grado de libertad interno prácticamente no agrega estados de baja energía.

Segundo caso: $\beta_c^0\epsilon \ll 1$. De vuelta, como T_c y T_c^0 son del mismo orden, en este caso también tenemos $\beta_c\epsilon \ll 1$. En este caso podemos encontrar una expresión aproximada para el segundo término en (1) usando la ayuda del enunciado con $\alpha \ll 1$. Reemplazando $\nu = 3/2$ en esa ecuación vemos que

$$g_{3/2}(e^{-\alpha}) = \underbrace{\Gamma(-1/2)}_{=-2\sqrt{\pi}}\sqrt{\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\zeta(3/2-n)\alpha^n \simeq \zeta(3/2) - 2\sqrt{\pi\alpha},$$

y usando este resultado en (1) obtenemos

$$\frac{T_c}{T_c^0} \simeq \left[2 - 2\frac{\sqrt{\pi\beta_c\epsilon}}{\zeta(3/2)}\right]^{-2/3} \simeq 2^{-2/3}\left[1 + \frac{2\sqrt{\pi\beta_c\epsilon}}{3\zeta(3/2)}\right]. \tag{4}$$

Para librarnos del β_c que tenemos en el lado derecho de la igualdad, fijémonos que esta ecuación implica

$$\beta_c = 2^{2/3}\beta_c^0\left[1 + O(\sqrt{\beta_c\epsilon})\right] = 2^{2/3}\beta_c^0\left[1 + O(\sqrt{\beta_c^0\epsilon})\right].$$

En la segunda igualdad hemos vuelto a usar que T_c y T_c^0 son del mismo orden. Por lo tanto, podemos reemplazar β_c por $2^{2/3}\beta_c^0$ en el lado derecho de (4) (las correcciones son de segundo orden en $\sqrt{\beta_c^0\epsilon}$), y obtenemos finalmente

$$\frac{T_c}{T_c^0} \simeq 2^{-2/3}\left[1 + \frac{2^{4/3}\sqrt{\pi\beta_c^0\epsilon}}{3\zeta(3/2)}\right], \tag{5}$$

que es lo que el enunciado pedía demostrar. En este caso, la temperatura crítica es significativamente menor a T_c^0 (poco más de la mitad), porque al tener ϵ chico el grado de libertad interno agrega un número significativo de estados de baja energía.