Segundo parcial de Física Teórica 3
11/7/18

Problema 1

Un gas de N partículas de masa m y espín $1/2$ está confinado en una superficie bidimensional de área A. La superficie está dividida en dos partes iguales, a y b. Una partícula tiene energía potencial 0 si está en la mitad a, y $\phi > 0$ si está en la mitad b. El gas se encuentra a temperatura 0.

(a) ¿Qué condición debe satisfacer ϕ (en términos de los datos del problema) para que todas las partículas se encuentren en la mitad a?

(b) Calcule el número de partículas N_a en la mitad a si no se satisface la condición del ítem anterior.

(c) Grafique N_a en función de ϕ, y discuta cómo cambiaría el gráfico si las partículas no obedecieran el principio de exclusión de Pauli.

Problema 2

Un gas de N partículas de masa m y espín 0 está atrapado en una trampa armónica tridimensional con una frecuencia distinta ω_i para cada dirección $i = 1, 2, 3$. Las energías monoparticulares son pues

$$\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2 + \omega_3^2 q_3^2).$$

El sistema se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Pruebe que la función de partición grancanónica del sistema está dada por

$$\log \mathcal{Z} = \frac{(kT)^3}{\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} g_4(z),$$

donde z es la fugacidad (*ayuda*: el área de una esfera de radio r en un espacio de 6 dimensiones es $\pi^3 r^5$).

(b) Calcule la temperatura crítica del sistema, T_c, y la fracción de partículas en el estado fundamental. Grafique esta última en función de T.

(c) Calcule la energía del sistema en los casos $T \gg T_c$ y $T < T_c$. Discuta sus resultados.

Problema 3

Considere una cadena de Ising abierta y sin campo magnético, con una constante de acoplamiento distinta para cada par de primeros vecinos. El hamiltoniano es pues

$$H(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i \, \sigma_i \sigma_{i+1},$$

donde $J_i > 0$ y, como siempre, N es el número de espines y $\sigma_i = \pm 1$. El sistema se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Pruebe que la función de partición canónica del sistema es

$$Q_N(K_1, \dots, K_{N-1}) = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \cosh K_i,$$

donde $K_i = \beta J_i$ (*ayuda*: no use la matriz de transferencia; empiece buscando una relación de recurrencia entre $Q_N(K_1, \dots, K_{N-1})$ y $Q_{N-1}(K_1, \dots, K_{N-2})$).

(b) Calcule la función de correlación $C(r) = \langle \sigma_1 \sigma_{r+1} \rangle$ (el término producto de valores medios no está porque $\langle \sigma_i \rangle = 0$) tomando las derivadas adecuadas de la función de partición (*ayuda*: estudie primero el caso $r = 1$, y para r genérico tenga en cuenta que $\sigma_1 \sigma_{r+1} = (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_2 \sigma_3) \dots (\sigma_r \sigma_{r+1})$, porque $\sigma_i^2 = 1$).

(c) Muestre que, en el caso $J_1 = J_2 = \dots = J_{N-1} \equiv J$, la función de correlación tiene la forma $C(r) = e^{-r/\xi}$, y calcule la longitud de correlación ξ. ¿Qué valores toma ξ en los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$?