Física Teórica 3 — 1er. cuatrimestre de 2019

Guía 2: *Combinatoria, probabilidad, información y entropía*

I. Combinatoria

1. ¿De cuántas formas se pueden ordenar 5 personas en hilera? ¿De cuántas formas si A y B deben estar uno al lado del otro?

2. ¿Cuántas *palabras* de 3 letras se pueden formar con las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*? Considerar los dos casos: sin repetir letras, o no importa si se repiten letras.

3. Se llama anagrama de una palabra a toda permutación de sus letras. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra MANZANA?

4. Hay N libros y M cajas. Cada caja puede contener hasta N libros. Cuántas maneras hay de acomodar los libros en las cajas si:

   a) Los libros son todos iguales y las cajas todas distintas.

   b) Los libros y las cajas son todos distintos.

   c) Los libros y las cajas son todos iguales.

   d) Los libros son todos distintos y las cajas todas iguales.

5. En lo que sigue, se trata de monedas que pueden mostrar sólo dos lados, cara o ceca.

   a) Hay N monedas alineadas. ¿Cuántas secuencias se pueden formar que tengan n monedas mostrando cara?

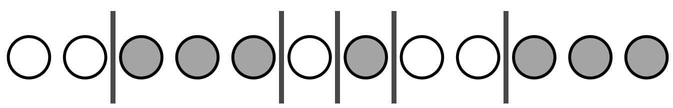
   b) Una moneda se arroja N veces. ¿Cuántas secuencias distintas existen en donde hayan aparecido n caras?

   c) Una moneda se arroja N veces. ¿Cuántas secuencias distintas existen en las que no haya dos caras seguidas?

   d) Una moneda se arroja N veces. ¿Cuántas secuencias distintas existen en las que dos caras seguidas recién aparecen en los dos últimos tiros?

   e) Se arrojan 9 monedas. ¿Cuántos lanzamientos posibles existen en donde el número de caras es par? ¿Y si fueran 99 monedas?

   f) Hay N monedas de 1 ising alineadas, y hay un número $n \leqslant N - 1$ de paredes divisorias. De las N monedas, r muestran cara y $s = N - r$ muestran ceca. Las paredes separan grupos de monedas con una misma orientación. A cada lado de una pared debe haber una moneda (es decir, no hay paredes en los extremos ni puede haber un espacio vacío entre dos paredes). Empezando desde la izquierda la primera moneda muestra cara. Fijados N, n y r (y definido $s = N - r$), ¿cuántas secuencias distintas se pueden formar que respeten esos números?



II. Probabilidades

6. Suponiendo que las monedas del ejercicio anterior tienen igual probabilidad de mostrar cara o ceca, calcule las probabilidades de los sucesos de los *items* (b) a (e)

7. **El problema de los 10 dados que se lanzan y se pide averiguar la probabilidad de que salgan exactamente tres 6**. Se lanzan 10 dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente tres 6?

8. **El problema del cumpleaños**. En un aula hay n personas. Considerando que todos los años tienen 365 días, que la probabilidad de que una persona cumpla años un determinado día es $1/365$, y que las fechas de los cumpleaños de las n personas son estadísticamente independientes, calcular la probabilidad $p(n)$ de que al menos dos personas cumplan años el mismo día. ¿Cuántas personas debe haber en el aula para que la probabilidad $p(n)$ supere el 50 %? Tome por asalto una computadora y grafique $p(n)$.

9. **Falso positivo**. Aparece una nueva enfermedad, 100 % fatal, asintomática, hasta que la cabeza explota. Es una enfermedad extremadamente rara, estimándose que se da en 1 de cada 100 millones de personas. Por suerte se inventa un test de diagnóstico. Teniendo en cuenta la gravedad de la enfermedad, El Laboratorio que fabrica el test recomienda aplicar el test a toda la población. "Además", argumenta —desinteresadamente—, "el test es 99,9999 % *infalible*" (las itálicas son nuestras): la probabilidad de que el test falle y dé positivo al ser ensayado en una persona sana es de 1 en un millón (*falso positivo*), y existe la misma probabilidad de que el test falle y dé negativo al ser aplicado a una persona que sí tiene la enfermedad (*falso negativo*). O sea, ¡Uno en un millón de que el test falle! ¿No es como decir que el test es perfecto? ¿Quién no apostaría a que el resultado del test está en lo cierto?

   a) Pues bien. Una persona se hace el test y le da positivo. Teniendo en cuenta la baja probabilidad de que el test falle, ¿hay alguna esperanza razonable de que no tenga la enfermedad, o debe ir ya mismo a dejar todos sus asuntos en orden y a cubrirse la cabeza con una Bolsa®, que también comercializa El Laboratorio? Concretamente, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la enfermedad?

   b) Si a una persona el test le da negativo, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga la enfermedad?

   c) Generalice sus resultados para valores arbitrarios de las probabilidades que aparecen como dato en el enunciado.

10. **Aproximación gaussiana de la distribución binomial**. Se trata de un caso particular del Teorema del límite central. La distribución binomial para N pruebas con probabilidad de éxito p puede escribirse como

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Aunque se aplica a n entero, no hay dificultad en extender la función a todos los reales. Defina $P(x) = e^{f(x)}$. En lugar de aproximar $P(x)$ vamos a aproximar $f(x)$.

a) Escriba $f(x)$ usando la aproximación de Stirling para el número binomial, es decir, usando que $\log z! \simeq z \log z - z$.

b) La función $P(x)$ es apreciablemente distinta de cero sólo cerca de su máximo, de manera que necesitamos una aproximación para $f(x)$ en esa región. Usando el resultado del *item* anterior, encuentre la posición x_0 del máximo de $P(x)$. Note que esto es equivalente a encontrar el máximo de $f(x)$.

c) Desarrolle $f(x)$ alrededor de x_0 hasta orden cuadrático. Verifique que es un máximo.

d) Reemplace la aproximación cuadrática para $f(x)$ en la definición $P(x) = e^{f(x)}$ y encuentre así la gaussiana que aproxima a $P(x)$. *Nota*: términos omitidos en la aproximación de Stirling, que no afectan en la práctica la localización del máximo ni la aproximación para $f(x)$, sí contribuyen, sin embargo, con un factor de normalización, que en nuestra aproximación falta. Esto puede remediarse multiplicando el resultado por la constante adecuada que haga $\int P(x) = 1$. Calcule esta constante. No sería necesario recurrir a este último paso si usáramos la aproximación de Stirling más precisa, $\log z! \simeq \log \sqrt{2\pi z} + z \log z - z$.

e) Compare el valor medio y la dispersión de la distribución gaussiana aproximada con el valor medio y la dispersión de la distribución binomial original.

11. **El problema de Jacob Bernoulli**. En *Ars cojectandi*, Bernoulli plantea el siguiente problema. Una urna contiene fichas blancas y negras en proporción de 3 a 2. Así, la probabilidad de extraer una ficha blanca es $p = \frac{3}{5}$. En cada paso se extrae una ficha, se anota su color y se la devuelve a la urna. Qué número N de veces debe repetirse este proceso para que, con una probabilidad de $\frac{1000}{1001}$, la fracción de fichas blancas extraídas esté entre $\frac{29}{50}$ y $\frac{31}{50}$. *Nota*: el problema está relacionado con la Ley de los grandes números. Qué tan grande tiene que ser una muestra para que la frecuencia de los resultados aproxime a la probabilidad con un dado error. Bernoulli sólo dio un valor de N máximo, igual a 25 550, que resulta en realidad muy conservativo. Para dar con el valor preciso de N usted necesitará hacer el cálculo en una computadora: puede usar la distribución binomial y hacer las sumas necesarias numéricamente, o aproximar la distribución por una normal y usar la inversa de la función error. Esta función está definida en la mayoría de los programas de cálculo y también existen calculadoras en la web, basta con googlear "inverse error function online").

III. Procesos aleatorios

12. Dos personas, A y B, juegan a lanzar alternativamente una moneda; gana el primero que obtiene cara. Si A hace el primer lanzamiento, calcule las probabilidades que tiene cada uno de ganar. (*Sugerencia:* hay infinitos caminos independientes que llevan a uno u otro ganador y la probabilidad correspondiente puede obtenerse sumando la probabilidad de cada camino; dé a esta proposición una forma rigurosa).

13. Considere un proceso aleatorio que puede tomar los valores a y b. Sean $p_a(t)$ y $p_b(t)$ las probabilidades de que a tiempo t el proceso esté en el estado a y b, respectivamente. Las probabilidades de transición por unidad de tiempo son $W_{a\to b} = \alpha$, y $W_{b\to a} = \beta$. Escriba las ecuaciones diferenciales para la evolución de las probabilidades y encuentre $p_i(t)$ para $t \geqslant 0$ con una condición inicial arbitraria en $t = 0$. ¿Cuál es la distribución de equilibrio?

14. **El modelo de Ehrenfest**. Para ilustrar la tendencia al equilibrio, Tatiana y Paul Ehrenfest propusieron el siguiente modelo: N bolas, numeradas de 1 a N, se distribuyen en dos urnas. En cada paso una bola se elige al azar y se la cambia de urna. La variable aleatoria que consideraremos es el número n de bolas en la primera urna, y llamaremos $p_m(n)$ a la probabilidad de que luego de m pasos esta urna contenga n bolas.

    a) Muestre que el proceso así definido es un proceso de Markov. Para eso escriba la ecuación de evolución para la probabilidad, es decir, una ecuación que dé $p_{m+1}(n)$ en términos de las probabilidades en los pasos anteriores.

    b) Mostrar que la solución estacionaria, $p(n)$, es una binomial. *Sugerencia:* la condición de distribución estacionaria quedará en la forma de una ecuación de recurrencia para $p(n)$. Esto puede resolverse con el método de la **función generatriz**, definiendo la función auxiliar $F(x) = \sum x^n p(n)$ y transformando la ecuación de recurrencia para p en una ecuación diferencial para F, sujeta a la condición $F(1) = 1$. Los coeficientes del desarrollo de $F(x)$ en potencias de x son las probabilidades $p(n)$.

15. La probabilidad por unidad de tiempo de que una persona dé un paso hacia adelante es α, y de que dé un paso hacia atrás es β. Su posición puede asumir todos los valores enteros entre menos y más infinito. Sea $p_n(t)$ la probabilidad de que la persona ocupe la posición n a tiempo t.

    a) Escribir la ecuación diferencial de evolución para $p_n(t)$.

    b) Verificar que la probabilidad total se conserva, $\sum_n \dot{p}_n(t) = 0$.

    c) Escribir y resolver la ecuación de evolución para $\langle n \rangle$.

    d) Mostrar que, con una adecuada redefinición de la escala temporal, para la caminata simétrica ($\alpha = \beta$) la ecuación de evolución de la probabilidad puede escribirse en la forma $\dot{p}_n = p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n$.

    e) Para el caso de la caminata simétrica del *item* anterior, encontrar $p_n(t)$ tomando como condición inicial que la persona está en $n = 0$ a $t = 0$. *Sugerencia:* Defina $p_n(t) = e^{-2t} f_n(t)$. Encuentre la ecuación que satisface $f_n(t)$. Compare con la relación de recurrencia $I'_n(x) = \frac{1}{2}\left[I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)\right]$, donde I_n es la función de Bessel modificada de primera especie.

    f) Graficar $p_n(t)$ en función de n para una sucesión de valores de t, empezando en $t = 0$.

IV. Información y Entropía

16. En Teoría de la Información, la entropía se define como

$$S = -\sum_{r=1}^{M} p(r) \log p(r),$$

donde $p(r)$ es la probabilidad del estado r, entre M posibles. A mayor entropía mayor es la incertidumbre antes de conocer el estado de un sistema, y entonces mayor es la información que se gana al conocerlo. Por ejemplo, ¿qué pasa con S cuando uno de los estados ocurre con probabilidad 1?

a) Graficar $x \log x$ en el intervalo $\overline{0,1}$.

b) Demostrar que S es no negativa y que es máxima cuando todos los estados tienen igual probabilidad, $p(r) = 1/M$. *Sugerencia:* que hay un extremo es fácil; demostrar que es un máximo es más difícil. Las dos cosas pueden hacerse en un solo paso usando la llamada desigualdad de Jensen, de la teoría de funciones convexas. Si Φ es continua y convexa, entonces

$$\Phi\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} a_k\right) \leqslant \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \Phi(a_k).$$

(Es fácil entender esta desigualdad si se piensa a $\Phi(x)$ como la función que define la coordenada y de cierto arco convexo, con una distribución de masas iguales sobre el arco y cuyas coordenadas x son las cantidades a_k. La desigualdad dice que el centro de masa está *dentro* del arco, lo que es bastante intuitivo; Callen, §17-1).

17. Calcular la entropía para las siguientes distribuciones:

a) Uniforme discreta: $P(n) = \frac{1}{N}$; con $1 \leqslant n \leqslant N$, números enteros.

b) Binomial: $P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$; con $n, N \in \mathbb{N}$ y $p < 1$.

c) Uniforme continua: $f(x) = 1/L$; con $x \in [0, L]$.

d) Exponencial: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; con $x, \lambda \geqslant 0$.

e) Gaussiana: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Para las variables continuas debe reemplazar la sumatoria sobre estados r en la definición de la entropía por una integral sobre el soporte de la variable. En ese caso se la llama "Entropía Diferencial".

18. **Principio de Máxima Entropía**. Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre la distribución de probabilidades de Máxima Entropía de una variable aleatoria si conoce

a) $\langle x \rangle = \mu$, donde $0 \leqslant x < \infty$.

b) $\langle x \rangle = \mu$ y $\mathrm{Var}(x) = \langle (x-\mu)^2 \rangle = \sigma^2$, donde $\infty < x < \infty$.

19. Se observa que en un dado cargado el número 6 sale el doble de veces que el número 1. No se observa nada raro para las otras caras. ¿Cuáles son las probabilidades p_m con $1 \leqslant m \leqslant 6$ que maximizan la entropía?

20. Dado un experimento con espacio muestral discreto, calcule la distribución de probabilidad que maximiza la entropía dados los vínculos $\langle A_k \rangle = a_k$ con $k = 1, \ldots, n$. No es necesario que obtenga el valor de los multiplicadores de Lagrange, pero sí que indique de qué ecuaciones habría que despejarlos. Calcule la entropía de esta distribución de probabilidad, así como su derivada respecto a a_k.