Física Teórica 3 — 1er. cuatrimestre de 2019

Re: Guía 4. Un problema de transporte
en la aproximación de equilibrio local y tiempo de relajación

■ La situación general del problema es la siguiente: un gas está en reposo, en régimen estacionario, sin fuerzas externas y con una temperatura y una densidad levemente inhomogéneas. Usando la aproximación de equilibrio local y de tiempo de relajación, se pide encontrar las ecuaciones que determinan la densidad de partículas y el campo de temperatura. En particular, se considera la situación en la que el gas está entre dos placas infinitas paralelas separadas una distancia L. La temperatura de una de las placas es T_0 y la de la otra placa es T_1. Sobre la primera placa la densidad es n_0.

Solución. En la aproximación de equilibrio local escribimos

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) &= f_0(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \delta f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \\ &= \frac{n(\mathbf{r},t)}{[2\pi mkT(\mathbf{r},t)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{|\mathbf{p}-m\mathbf{u}(\mathbf{r},t)|^2}{2mkT(\mathbf{r},t)}\right] + \delta f(\mathbf{r},\mathbf{p},t), \end{aligned} \tag{1}$$

con tres condiciones suplementarias que fijan los valores de $n, \mathbf{u}$ y T, a saber,

$$\int d^3p\ \delta f = 0, \qquad \int d^3p\ \mathbf{p}\,\delta f = 0, \qquad \int d^3p\ \frac{p^2}{2m}\,\delta f = 0. \tag{2}$$

Vimos que estas condiciones equivalen a decir que las funciones n, $\mathbf{u}$ y T que aparecen en la distribución f_0 son la densidad de partículas exacta, la velocidad media exacta y la temperatura exacta. En este último caso, la temperatura se define a través de la densidad de energía exacta y de la velocidad media,

$$\epsilon(\mathbf{r},t) = \frac{3}{2}n(\mathbf{r},t)kT(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}mn(\mathbf{r},t)u(\mathbf{r},t)^2. \tag{3}$$

En la aproximación de tiempo de relajación, por otro lado, resulta

$$\delta f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = -\tau\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla + \mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\cdot\nabla_p\right) f_0(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \tag{4}$$

Puesto que el problema es estacionario, que no hay fuerzas externas y que la velocidad del fluido es cero, queda

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{r},\mathbf{p}) &= \frac{1}{\left[2\pi mkT(\mathbf{r})\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{p^2}{2mkT(r)}\right], \\ \delta f(\mathbf{r},\mathbf{p}) &= -\tau\,\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla f_0(\mathbf{r},\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{5}$$

Mientras no sea estrictamente necesario, la expresión explícita y por extenso de δf no tiene mucho uso y lo más común es no escribirla. Para todo lo que sigue alcanza con la Ec. (5).

Sabemos que las tres condiciones (2) sobre δf son equivalentes a la ecuación de continuidad exacta y a las ecuaciones de conservación del impulso y de la energía a orden cero. Ya sea que recuerden este resultado o que calculen explícitamente las tres integrales (2), lo que deben ver es que:

i) La primera condición, antes de anular la velocidad media, implica:

$$\nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \tag{6}$$

ecuación que se cumple automáticamente por ser nula la velocidad media.

ii) De la segunda condición se obtiene:

$$\partial_i \Theta_{ij}^{(0)} = 0, \tag{7}$$

donde $\Theta_{ij}^{(0)}$ es la aproximación de orden cero para el tensor de tensiones,

$$\Theta_{ij}^{(0)} = nkT\delta_{ij} + nmu_i u_j = nkT\delta_{ij}. \tag{8}$$

Pero, en definitiva, como la velocidad media es nula, la segunda condición integral sobre δf implica la ecuación

$$\nabla(nkT) = 0. \tag{9}$$

iii) De la tercera condición sobre δf se deduce que

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\epsilon^{(0)} = 0, \tag{10}$$

donde

$$\mathbf{j}_\epsilon^{(0)} = \int d^3p\, \frac{p^2}{2m}\, \frac{\mathbf{p}}{m}\, f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \tag{11}$$

Como $p^2\mathbf{p}$ es función impar del impulso y f_0 es una función esféricamente simétrica, esta integral se anula. De modo que la Ec. (10) se cumple automáticamente sin aportar ecuaciones extra.

En resumen: hasta aquí la única ecuación que tenemos es la Ec. (9).

El paso siguiente es escribir las ecuaciones de continuidad para el impulso y la energía cinética a primer orden en τ. Notar que no planteamos la ecuación de continuidad para el número de partículas debido a que esa ecuación está considerada de manera exacta en la primera condición (2). Para escribir las otras ecuaciones de continuidad es necesario calcular el tensor de tensiones y la corriente de energía hasta orden τ.

La corrección al tensor de tensiones que viene a través de δf es

$$\Theta_{ij}^{(1)} = \int d^3p\, \frac{p_i p_j}{m}\, \delta f = -\tau \int d^3p\, \frac{p_i p_j}{m}\, \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\tau \nabla \cdot \int d^3p\, \frac{p_i p_j}{m}\, \frac{\mathbf{p}}{m} f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0. \tag{12}$$

La integral se anula debido a que el integrando es una función impar del impulso. Entonces a través de la conservación del impulso no ganamos ninguna ecuación adicional.

La corrección a la corriente de energía cinética está dada por

$$\mathbf{j}_\epsilon^{(1)} = \int d^3p \frac{p^2}{2m}\frac{\mathbf{p}}{m}\,\delta f = -\tau \int d^3p\;\frac{p^2}{2m}\;\frac{\mathbf{p}}{m}\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla\right) f_0(\mathbf{r},\mathbf{p}). \tag{13}$$

Ahora en el integrando hay cuatro componentes del impulso, de modo que la integral no será automáticamente nula. La componente i-ésima de la corriente resulta

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{j}_\epsilon^{(1)}\right]_i &= -\tau\nabla_j \cdot \int d^3p\;\frac{p^2}{2m}\;\frac{p_i p_j}{m^2}\;f_0(\mathbf{r},\mathbf{p}) \\ &= -\frac{5\tau}{2m}\;\nabla_i\, n(kT)^2. \end{aligned}\tag{14}$$

Usando la Ec. (9), que permite escribir $nT = \text{constante}$, queda

$$\mathbf{j}_\epsilon^{(1)} = -\frac{5\tau n k^2 T}{2m}\;\nabla T. \tag{15}$$

Luego, la ecuación de continuidad a primer orden en τ para la energía se lee como

$$\nabla\cdot(\tau n T \nabla T) = 0. \tag{16}$$

Usando nuevamente la Ec. (9) se obtiene

$$\nabla\cdot(\tau\nabla T) = 0. \tag{17}$$

Esta es nuestra segunda ecuación.

Finalmente, las dos ecuaciones que fijan los campos de temperatura y densidad son

$$\nabla(nT) = 0, \tag{18}$$

$$\nabla\cdot(\tau\nabla T) = 0. \tag{19}$$

El camino libre medio es en general una función de la temperatura y de la densidad, por lo tanto no está permitido, en principio, sacar τ fuera del operador ∇. La segunda ecuación debe escribirse como

$$\tau\nabla^2 T + \nabla\tau\cdot\nabla T = 0. \tag{20}$$

Una estimación cualitativa del tiempo τ se obtiene a través del camino libre medio, $\lambda \sim (\sigma n)^{-1}$, y de la velocidad media, $\langle v\rangle \sim (kT/m)^{1/2}$,

$$\tau \sim \frac{\lambda}{\langle v\rangle} \sim \frac{1}{\sigma n}\sqrt{\frac{m}{kT}} \tag{21}$$

donde σ es la sección eficaz total para el choque binario entre dos partículas, que suponemos independiente de la temperatura. Adoptando para τ esta expresión, lo reescribimos como

$$\tau = \frac{\sqrt{mkT}}{\sigma nkT}. \tag{22}$$

Escrito en esta forma volvemos a formar el producto nkT que, debido a la Ec. (9), sabemos que es constante. Así, τ termina siendo una función de la temperatura, y luego de algunos pasos elementales la Ec. (20) se escribe en la forma

$$\nabla^2 T + \frac{1}{2}\frac{|\nabla T|^2}{T} = 0. \tag{23}$$

■ Pasando ahora al problema de las dos placas a distancia L mantenidas a temperaturas T_0 y T_1. El problema es unidimensional. Si x es la coordenada que se mide en la dirección normal a las placas, con la primera placa en $x = 0$ y la segunda en $x = L$, el par de ecuaciones que determina la densidad y la temperatura es

$$(nT)' = 0, \tag{24}$$

$$T'' + \frac{T'^2}{2T} = 0. \tag{25}$$

La primera ecuación permite escribir

$$n(x)T(x) = n_0 T_0, \tag{26}$$

donde n_0 es la densidad del gas en la vecindad de la primera placa. Conocido el perfil $T(x)$ esta ecuación da la densidad $n(x)$.

En la Ec. (25), una primera aproximación consiste en despreciar el término proporcional a T'^2. Esto se justifica por el hecho de que estamos asumiendo que las variaciones con la posición son débiles. Si se desprecia ese término resulta la ecuación

$$T'' = 0, \tag{27}$$

y obtenemos un perfil lineal de temperatura,

$$\begin{aligned} T(x) &= T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{L} \\ &= T_0 + \frac{\Delta T}{L}x, \end{aligned} \tag{28}$$

donde hemos definido $\Delta T = T_1 - T_0$. El perfil de densidad correspondiente es

$$n(x) = \frac{n_0 T_0}{T_0 + \frac{\Delta T}{L}x} \approx n_0 - \frac{\Delta T}{T_0}\frac{x}{L}. \tag{29}$$

A manera de comparación, la solución exacta de la Ec. (25) es

$$T(x) = \left\{1 + \left[\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{3/2} - 1\right]\frac{x}{L}\right\}^{2/3} T_0. \tag{30}$$

Esta solución se obtiene de manera inmediata a partir de la corriente (15) y de la expresión (22) para el tiempo τ. En efecto, combinando estas dos ecuaciones y usando la constancia de nT, queda

$$\mathbf{j}_\epsilon^{(1)} = -\frac{5}{2}\frac{k^{3/2}}{\sigma m^{1/2}} T^{1/2}\nabla T = -\frac{5}{3}\frac{k^{3/2}}{\sigma m^{1/2}}\nabla T^{3/2}. \tag{31}$$

La ecuación de continuidad para la energía cinética se lee ahora como $\nabla \cdot (\nabla T^{3/2}) = 0$, y su versión unidimensional es

$$(T^{3/2})'' = 0. \tag{32}$$

De aquí resulta

$$T^{3/2} = ax + b, \tag{33}$$

donde a y b son constantes de integración. En un par de pasos se obtiene la solución (30).

Si queremos ver cómo se aparta la solución exacta de la solución lineal aproximada, podemos expandir la Ec. (30) en potencias de $\Delta T = T_1 - T_0$. El resultado es

$$T(x) \approx T_0 + \frac{\Delta T}{L}x + \frac{1}{4T_0}\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^2 (Lx - x^2). \tag{34}$$

Los dos primeros términos corresponden a la aproximación lineal, y el segundo término da una corrección cuadrática en ΔT. Hay que remarcar que estos refinamientos pueden carecer de sentido, debido a que es posible que sean del mismo orden que las correcciones a siguiente orden en τ.

Para graficar los resultados anteriores conviene trabajar con cantidades adimensionalizadas. Definiendo $t = T/T_0$, $\nu = n/n_0$ y $s = x/L$, el perfil de temperatura asociado a la ecuación aproximada (27) es

$$t(s) = 1 + (t_1 - 1)s, \tag{35}$$

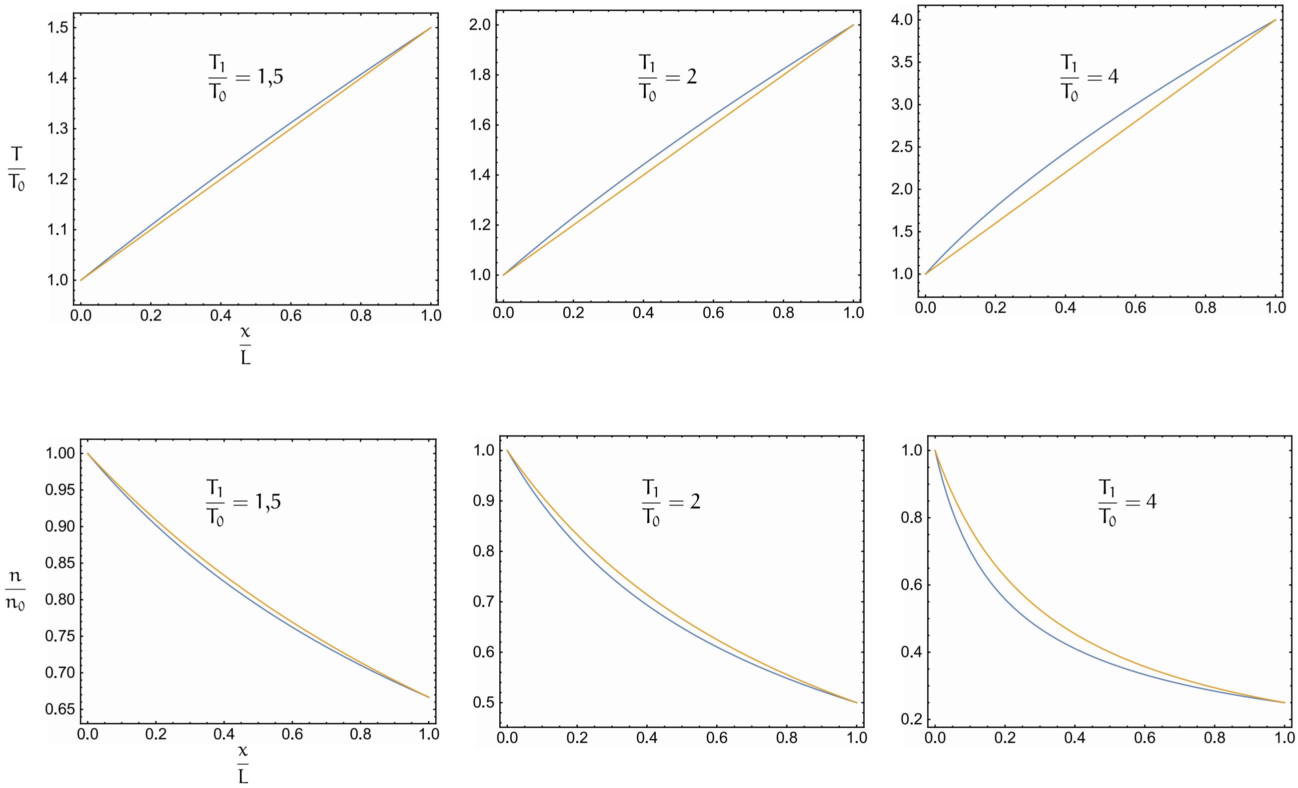
y el asociado a la ecuación exacta (25),

$$t(s) = \left[1 + \left(t_1^{3/2} - 1\right) s\right]^{2/3}. \tag{36}$$

En los dos casos es

$$\nu(s) = \frac{1}{t(s)}. \tag{37}$$

Las figuras siguientes muestran los perfiles aproximados y exactos, en el sentido de que uno corresponde a la Ec. (27) y el otro a la Ec. (25), para tres valores del gradiente medio $\Delta T/L$. Las soluciones aproximadas se desvían poco de las soluciones exactas aún para valores considerables del gradiente medio. La primera serie de figuras muestra el perfil de temperatura, mientras que la segunda muestra el perfil de densidad.


$\frac{T_1}{T_0} = 1{,}5$
$\frac{T_1}{T_0} = 2$
$\frac{T_1}{T_0} = 4$
$\frac{T}{T_0}$
$\frac{x}{L}$
$\frac{T_1}{T_0} = 1{,}5$
$\frac{T_1}{T_0} = 2$
$\frac{T_1}{T_0} = 4$
$\frac{n}{n_0}$
$\frac{x}{L}$