Física Teórica 3 — 1er. cuatrimestre de 2019

Guía 8: *Fenómenos críticos y grupo de renormalización*

1. La energía libre de Landau para un ferromagneto en presencia de un campo magnético externo es:

$$f(m, T) = -hm + a(T)m^2 + \tfrac{1}{2}b(T)m^4. \tag{1}$$

   a) Asumiendo que existe T_c tal que la magnetización espontánea es nula para $T > T_c$ y no nula para $T < T_c$, ¿qué condiciones deben cumplir $a(T)$ y $b(T)$?

   b) Sea $a(T) = (T - T_c)a_0$ y $b(T) = b_0$, con a_0 y b_0 mayores que cero. Cuando la temperatura es cercana a T_c quedan definidos los siguientes comportamientos asintóticos:

$$m(T) \sim (T_c - T)^{\beta} \qquad \text{para } T < T_c \text{ y } h = 0,$$

$$c(T) \sim |T - T_c|^{-\alpha} \qquad \text{para } h = 0,$$

$$\chi(T) = \left.\frac{\partial m}{\partial h}\right|_{h=0} \sim |T - T_c|^{-\gamma},$$

$$m(h) \sim h^{1/\delta} \qquad \text{para } T = T_c.$$

   Calcule los exponentes críticos asociados a la energía libre de Landau.

2. Usando la aproximación de Bragg-Williams, calcular la energía libre de Helmholtz como función de la magnetización para una red de Ising con γ primeros vecinos y constante de interacción J. Mostrar explícitamente que para $m = \langle s \rangle \ll 1$ se obtiene una energía libre por espín de la forma (1), donde el coeficiente a es proporcional a $T - T_c$.

3. (Pathria 3ra. ed., problema 12.20). Considere un sistema sin campo externo cuya energía libre de Landau incluye un término proporcional a m^6,

$$f(m, T) = r(t)m^2 + s(t)m^4 + um^6,$$

   donde u es una constante positiva. Minimizando f respecto de m, estudie la magnetización espontánea m_0 en función de los parámetros r y s. En particular muestre que:

   a) Para $r > 0$ y $s > -(3ur)^{1/2}$, $m_0 = 0$ es la única solución real.

   b) Para $r > 0$ y $-(4ur)^{1/2} < s \leqslant -(3ur)^{1/2}$, $m_0 = 0$ o $\pm m_1$, donde $m_1 = \frac{\sqrt{s^2-3ur}-s}{3u}$. Sin embargo, el mínimo de f en $m_0 = 0$ es menor que el par de mínimos en $\pm m_1$, de manera que, en última instancia, el valor de equilibrio es $m_0 = 0$.

   c) Para $r > 0$ y $s = -(4ur)^{1/2}$, $m_0 = 0$ o $\pm(r/u)^{1/4}$. ¿Cómo se comparan las estabilidades relativas de cada mínimo?

d) Para $r > 0$ y $s < -(4ur)^{1/2}$, $m_0 = 0$ o $m_0 = \pm m_1$. El valor mínimo de f ahora es alcanzado en $\pm m_1$, lo que implica una transición de fase de primer orden, puesto que la diferencia entre $m_0 = 0$ y m_1 es finita. En el plano sr, la línea $s = -(4ur)^{1/2}$, con $r > 0$, es usualmente caracterizada como una "línea de transiciones de fase de primer orden".

e) Para $r = 0$ y $s < 0$, $m_0 = \pm(2|s|/3u)^{1/2}$.

f) Para $r < 0$, $m_0 = \pm m_1$ para todo s. Cuando $r \to 0$, $m_1 \to 0$ si $s > 0$.

g) Para $r = 0$ y $s > 0$, $m_0 = 0$ es la única solución. Junto con el resultado del *item* anterior, esto implica que la línea $r = 0$, con $s > 0$, es una "línea de transiciones de fase de segundo orden", puesto que los dos estados disponibles difieren en un valor de m arbitrariamente pequeño. Las líneas de primer y segundo orden se cruzan en el punto $r = s = 0$, situación que se caracteriza diciendo que este es un punto tricrítico.

4. [A. Hankey and H. E. Stanley, Phys. Rev. B **6**, 3515 (1972)]. Sea $\lambda > 0$.

a) Se dice que una función de una variable es homogénea si satisface $f(\lambda x) = g(\lambda)f(x)$. Demuestre que $g(\lambda) = \lambda^p$ para algún p.

b) Análogamente, una función de dos variables es homogénea si cumple que $f(\lambda x, \lambda y) = g(\lambda)f(x, y)$. Demostrar que $g(\lambda) = \lambda^p$ para algún p.

c) Una función homogénea generalizada de dos variables cumple que $f(\lambda^a x, \lambda^b y) = g(\lambda)f(x, y)$. Demostrar que $g(\lambda)$ es igual a λ^c para algún c. Demostrar también que

$$f(x, y) = |x|^{c/a} g_{\pm}\big(y/|x|^{b/a}\big)\,,$$

donde g_+ corresponde a $x > 0$ y g_- a $x < 0$. (Notar que hay sólo dos exponentes independientes, c/a y b/a, lo que corresponde al hecho de que c puede elegirse siempre igual a 1 redefiniendo a y b.)

5. (Stanley, *Introduction to phase transitions...*, §11.2-3). La hipótesis de *scaling* de Widom supone que, cerca del punto crítico, la energía libre de Gibbs de un sistema magnético es una función homogénea generalizada,

$$G(\lambda^a t, \lambda^b H) = \lambda G(t, H),$$

donde $t = (T - T_c)/T_c$ es la temperatura reducida y H es el campo magnético.

a) Calcular los exponente críticos α, β, γ y δ en función de a y b.

b) Verificar que se satisfacen las igualdades:

i) Identidad de Griffiths, $\alpha = 2 - \beta(1 + \delta)$.

ii) Identidad de Rushbrooke, $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$.

iii) Identidad de Widom, $\gamma = \beta(\delta - 1)$.

6. Grupo de renormalización para el modelo de Ising unidimensional (Dalvit, problema 5.28). El hamiltoniano de un modelo de Ising unidimensional infinito es

$$H = -b \sum_i s_i - K \sum_i s_i s_{i+1},$$

donde cada s_i puede tomar los valores ± 1 y donde $b = \beta\mu B$ y $K = \beta J$. La función de partición es

$$Z(K, b) = \sum_{s_i=\pm 1} e^{-\beta H}.$$

a) Escriba la función de partición como dos sumas, una sobre los espines en posiciones pares y otra sobre los espines en posiciones impares,

$$Z(K, b) = \sum_{s_{2i}} \sum_{s_{2i+1}} e^{-\beta H}.$$

Haciendo explícitamente la suma sobre los espines impares (por ejemplo usando la matriz de transferencia) muestre que la función de partición obedece una ecuación de la forma

$$Z(K, b) = Z_0(K, b) Z(\bar{K}, \bar{b}),$$

donde $\bar{K}(K, b)$ y $\bar{b}(K, b)$ son parámetros efectivos de interacción para el sistema que consiste sólo en los espines de sitios pares. Si se definen $\tau = e^{-4K}$ y $\eta = e^{-2b}$, encuentre los parámetros renormalizados $\bar{\tau}$ y $\bar{\eta}$ correspondientes en términos de τ y de η.

b) Para una cadena lineal infinita la operación anterior puede ser repetida indefinidamente, dando lugar a una secuencia de parámetros renormalizados τ_n y η_n. Un punto fijo de la transformación es un par de valores (τ^*, η^*) tal que $\bar{\tau}(\tau^*, \eta^*) = \tau^*$ y $\bar{\eta}(\tau^*, \eta^*) = \eta^*$. Suponga que los parámetros iniciales difieren poco de los del punto fijo, $\tau = \tau^* + \delta\tau$ y $\eta = \eta^* + \delta\eta$, donde $\delta\tau$ y $\delta\eta$ son cantidades pequeñas. Se dice que el punto fijo es estable con respecto a las perturbaciones en τ si $\delta\tau_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, e inestable si $\delta\tau_n$ aumenta al repetir la transformación. Análogamente se define la estabilidad respecto de η. Muestre que $(\tau^*, \eta^*) = (0, 1)$ es un punto fijo inestable respecto de los dos parámetros.

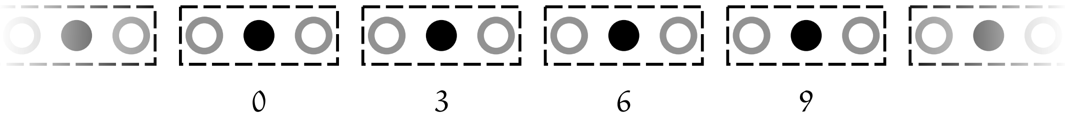
c) Use la transformación de grupo de renormalización para mostrar que, cerca de $T = 0$ y $B = 0$, la magnetización por espín sigue la siguiente ley de escala

$$m(T, B) \simeq \mathcal{M}\big(b\tau^{-\Delta}\big),$$

y encuentre el exponente Δ.

7. En el modelo de Ising en una dimensión, en lugar de sumar sobre los espines impares, se pueden definir otras formas de decimar el sistema. Por ejemplo, una posible forma

de decimar es sumar sobre dos de cada tres espines, lo que equivale a formar celdas de Kadanoff de longitud 3.



Los espines cuyo índice es un múltiplo de 3 permanecen en la red, y los demás se suman. Muestre que para esta elección la transformación del grupo de renormalización también puede ser calculada en forma cerrada y encuentre los puntos fijos.

8. Considere el modelo de Potts en una dimensión, cuyo hamiltoniano es

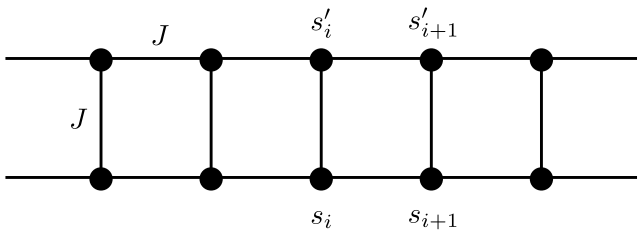
$$H(s_1, s_2, \ldots, s_N) = -J \sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i s_{i+1}}.$$

Cada s_i puede tomar $p \geqslant 2$ valores distintos.

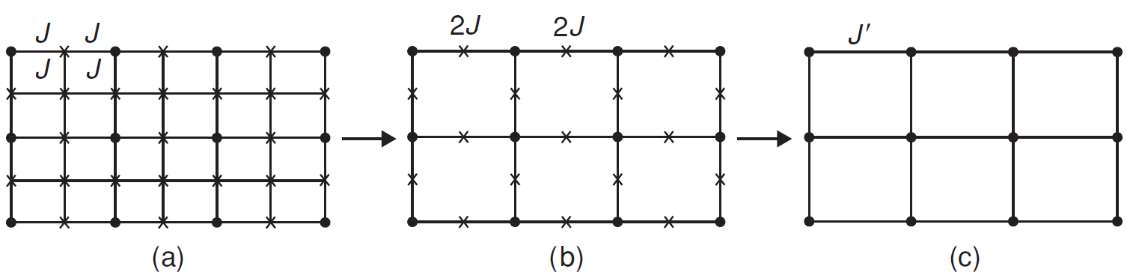
  a) Obtenga las ecuaciones del grupo de renormalización correspondientes a decimar el sistema sumando sobre todos los sitios pares.

  b) Encuentre los puntos fijos y estudie su estabilidad.

9. Considerar la doble cadena de Ising con interacciones a primeros vecinos de intensidad J. Decimar el sistema sumando sobre los escalones pares. Encontrar la transformación de grupo de renormalización y mostrar que aparecen interacciones más generales que las de primeros vecinos.



10. (Pathria 3ra. ed., problema 14.5). Una forma aproximada de implementar una transformación del grupo de renormalización en una red cuadrada es la llamada transformación de Migdal-Kadanoff, que se muestra en la figura.



La transformación consta de dos pasos. Primero, la mitad de los enlaces en la red simplemente se elimina, de manera que la escala de longitud de la red se multiplica por 2; para compensar eso, la constante de acoplamiento de los enlaces restantes se cambia de J a 2J. Eso lleva de la figura (a) a la figura (b). En segundo lugar, los sitios marcados con cruces en la figura (b) se eliminan por medio de transformaciones de decimación unidimensionales, lo cual lleva a la figura (c) con constante de acoplamiento J'.

a) Muestre que la relación de recurrencia para un modelo de Ising de espín 1/2 en una red cuadrada, de acuerdo con esta transformación, es

$$x' = \frac{2x^2}{1+x^4},$$

donde $x = e^{-2K}$, con $K = \beta J$. Hay dos puntos fijos triviales, $x = 0$ y $x = 1$. Muestre que hay un punto fijo no trivial dado por

$$x^* = \frac{1}{3}\left\{-1 + 2\sqrt{2}\sinh\left[\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{17}{2\sqrt{2}}\right)\right]\right\} \simeq 0{,}5437.$$

Compare con el valor exacto de x_c.

b) Linealizando alrededor de este punto fijo, muestre que el autovalor λ de esta transformación es

$$\lambda = \frac{2(1-x^*)}{x^*} \simeq 1{,}6785,$$

y por lo tanto $\nu = \log 2/\log\lambda \simeq 1{,}338$. Comparar con el valor exacto.