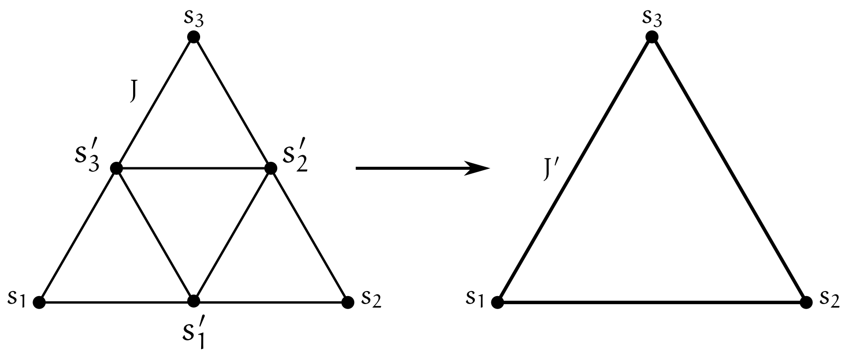

Tu función de partición es una suma sobre los espines primados y los no primados. No son tantos espines como para que no podamos escribir todo por extenso:

$$Z = \sum_{s_1,s_2,s_3} \sum_{s_1',s_2',s_3'} \exp\big[-\beta H(s_1,s_2,s_3,s_1',s_2',s_3')\big]. \tag{1}$$

Los espines primados son los que están en medio de los lados del triángulo grande. Cuando el ejercicio pide la interacción efectiva de los espines de los vértices, lo que hay que hacer es eliminar de la descripción los espines intermedios, haciendo la suma sobre ellos explícitamente:

$$Z = \sum_{s_1,s_2,s_3} \left\{ \sum_{s_1',s_2',s_3'} \exp\big[-\beta H(s_1,s_2,s_3,s_1',s_2',s_3')\big] \right\}. \tag{2}$$

El término entre llaves es una función de s_1, s_2 y s_3. Lo que quisiéramos es poder escribir eso como la exponencial de una energía de interacción entre tres espines:

$$\sum_{s_1',s_2',s_3'} \exp\big[-\beta H(s_1,s_2,s_3,s_1',s_2',s_3')\big] \equiv C \exp\big[-\beta H_{\text{ef}}(s_1,s_2,s_3)\big]. \tag{3}$$

La inclusión de una constante C es para tener cierta libertad en la elección de la forma de H_{ef}. Luego,

$$Z = C \sum_{s_1,s_2,s_3} \exp\big[-\beta H_{\text{ef}}(s_1,s_2,s_3)\big]. \tag{4}$$

De esta forma, se ve que la estadística de los espines sin primar es la de un sistema de tres espines con interacción efectiva H_{ef}.

El problema principal es hacer la suma (3) sobre los espines primados. Esta suma tiene 8 términos, así que puede hacerse a mano sin mucha dificultad. El otro punto crucial es poder hacer la separación $Ce^{-\beta H_{\text{ef}}}$ de manera tal que H_{ef} tenga la forma de la energía de interacción de 3 espines en triángulo. Es decir, debe poder leerse

$$\sum_{s_1',s_2',s_3'} \exp\big[-\beta H(s_1,s_2,s_3,s_1',s_2',s_3')\big] = C \exp\big[K'(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1)\big]. \tag{5}$$

La cuestión, finalmente, es cuánto valen C y K'. (Si no fuera posible encontrar estos valores, entonces querría decir que la interacción efectiva entre los tres espines sobrevivientes no es tan simple como se la buscaba. Habría que proponer una interacción efectiva más general, por ejemplo agregando un acoplamiento de tipo $s_1 s_2 s_3$).

Un caso sencillo donde el procedimiento puede verse más claramente es el de un sistema de 3 espines en línea, s_1, s_2 y s_3, cuya función de partición es

$$Z = \sum_{s_1, s_2, s_3} \exp\big[K(s_1 s_2 + s_2 s_3)\big]. \tag{6}$$

Supongamos que quisiéramos averiguar la interacción efectiva entre s_1 y s_3. Esto es eliminar de la descripción al espín s_2. Entonces hacemos explícitamente la suma sobre este espín,

$$Z = \sum_{s_1, s_3} \left\{ \sum_{s_2} \exp\big[K(s_1 s_2 + s_2 s_3)\big] \right\}. \tag{7}$$

La suma entre llaves es

$$\sum_{s_2} \exp\big[K(s_1 s_2 + s_2 s_3)\big] = e^{K(s_1 + s_3)} + e^{-K(s_1 + s_3)}. \tag{8}$$

Buscamos entonces una constante C y un acoplamiento K' tales que

$$e^{K(s_1+s_3)} + e^{-K(s_1+s_3)} = C e^{K' s_1 s_3}, \tag{9}$$

de manera que la función de partición se escriba como

$$Z = C \sum_{s_1, s_3} e^{K' s_1 s_3}. \tag{10}$$

La estadística de los espines s_1 y s_3 sería entonces la misma que la de dos espines que interactúan directamente con un acoplamiento K'.

En definitiva, volviendo a la ec. (9), y evaluando en los 4 valores posibles que puede tomar el par de espines s_1 y s_3, obtenemos 4 ecuaciones, de la cuales sólo 2 son independientes:

$$\begin{aligned}
s_1 = s_3 = 1 &\Rightarrow e^{K} + e^{-K} = C e^{K'}, \\
s_1 = 1, s_3 = -1 &\Rightarrow 2 = C e^{-K'}, \\
s_1 = -1, s_3 = 1 &\Rightarrow 2 = C e^{-K'}, \\
s_1 = s_3 = -1 &\Rightarrow e^{-K} + e^{K} = C e^{K'}.
\end{aligned}$$

De aquí se obtiene

$$e^{2K'} = \cosh K, \qquad C^2 = 4 \cosh K. \tag{11}$$