

Física Teórica 3 – 1er. cuatrimestre de 2019

Segundo parcial resuelto: 10/7/2019

■ **Problema 1.** N fermiones de espín $\frac{1}{2}$ y masa m están en una trampa armónica de frecuencia ω ,

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z).$$

- Calcular la energía de Fermi ϵ_F .
- Calcular la energía del gas a $T = 0$, expresada exclusivamente en términos de N y ϵ_F .
- Calcular el potencial químico como función de T para $kT \ll \epsilon_F$, reteniendo la primera corrección respecto de ϵ_F . El resultado debe quedar escrito sólo en términos de ϵ_F y T .
- Calcular la energía como función de la temperatura para $kT \ll \epsilon_F$. El resultado debe quedar escrito únicamente en términos de N , ϵ_F y T .
- Calcular C/kN como función de la temperatura para $kT \ll \epsilon_F$. El resultado debe quedar escrito únicamente en términos de ϵ_F y T .

Fórmulas útiles:

$$\int_0^\infty d\epsilon \frac{\phi(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \approx \int_0^\mu d\epsilon \phi(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} \phi'(\mu)(kT)^2, \quad f_\nu(e^\xi) \approx \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + \nu(\nu-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} \right].$$

Solución. La energía de Fermi se obtiene a través de la ecuación que da el número de partículas a $T = 0$. Teniendo en cuenta la degeneración de espín, es

$$N = 2 \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \Theta(\epsilon_F - \hbar\omega(n_x + n_y + n_z)). \quad (1)$$

Hay varias alternativas para aproximar la suma sobre estados discretos con una integral sobre variables continuas. La manera más directa es aproximar la suma mediante la regla que hemos visto en varios ejercicios de las guías:

$$\sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} f(n_x + n_y + n_z) \rightarrow \int_0^\infty dm \frac{m^2}{2} f(m). \quad (2)$$

La variable m es la suma $n_x + n_y + n_z$, y por lo tanto es proporcional a la energía,

$$\epsilon(m) = \hbar m. \quad (3)$$

Para una temperatura cualquiera, el número total de partículas se escribe como

$$N = 2 \int_0^\infty dm \frac{m^2}{2} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \hbar \omega m} + 1} = \frac{1}{(\hbar \omega)^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^2}{z^{-1} e^{\beta \epsilon} + 1}. \quad (4)$$

A $T = 0$ es

$$N = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon_F}{\hbar\omega} \right)^3. \quad (5)$$

De aquí resulta

$$\epsilon_F = (3N)^{1/3} \hbar\omega. \quad (6)$$

Otro camino para pasar de la suma a una integral es usar la aproximación semiclásica,

$$\sum_{\text{estados}} \rightarrow g_s \int \frac{d^3r d^3p}{h^3}. \quad (7)$$

De aquí se obtiene

$$N = \frac{2}{h^3} \int d^3r \int d^3p \Theta \left(\epsilon_F - \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \right). \quad (8)$$

Mediante el cambio de variables $P = p/\sqrt{2m}$ y $R = \sqrt{m\omega^2/2} r$, resulta

$$N = \frac{16}{(h\omega)^3} \int d^3R \int d^3P \Theta(\epsilon_F - P^2 - R^2). \quad (9)$$

Llamando \mathbf{Q} al vector que tiene por componentes $(R_x, R_y, R_z, P_x, P_y, P_z)$, la integral puede escribirse como

$$N = \frac{16}{(h\omega)^3} \int d^6Q \Theta(\epsilon_F - Q^2). \quad (10)$$

Esto es el volumen de una esfera de radio $\epsilon_F^{1/2}$ en un espacio de 6 dimensiones. Pasando a coordenadas polares, queda

$$N = \frac{16}{(h\omega)^3} \Omega_6 \int_0^{\epsilon_F^{1/2}} dQ Q^5 = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi\epsilon_F}{h\omega} \right)^3, \quad (11)$$

que conduce a los mismos resultados de antes.

Para calcular la energía podemos usar de nuevo la integral en m ,

$$E = 2 \int_0^\infty dm \frac{m^2}{2} \frac{\epsilon(m)}{z^{-1} e^{\beta\hbar\omega m} + 1} = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^3}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} + 1}, \quad (12)$$

que a $T = 0$ se reduce a

$$E(0) = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^3 = \frac{\epsilon_F^4}{4(\hbar\omega)^3}. \quad (13)$$

Comparando con la ecuación para el número de partículas, ec. (5), resulta

$$E(0) = \frac{3}{4} N \epsilon_F. \quad (14)$$

Para temperaturas finitas, pero mucho menores que la temperatura de Fermi, la ecuación para el número de partículas toma la forma

$$N = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^2}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} + 1} \approx \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \left[\frac{\mu^3}{3} + \frac{\pi^2}{3} \mu (kT)^2 \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{\hbar\omega} \right)^3 \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

Una fórmula que resulta práctica para calcular μ recursivamente se obtiene despejando μ de manera implícita,

$$\mu = (3N)^{1/3} \hbar\omega \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]^{-1/3}. \quad (16)$$

El orden más bajo en la aproximación consiste en tomar $T = 0$,

$$\mu(T) \approx (3N)^{1/3} \hbar\omega = \epsilon_F, \quad (17)$$

que es el resultado esperado. El orden siguiente se obtiene reemplazando este resultado en el segundo miembro de la ec. (16),

$$\mu(T) \approx \epsilon_F \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]^{-1/3} \approx \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

En el cálculo de la energía se siguen más o menos los mismos pasos:

$$E = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^3}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} + 1} \approx \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \left[\frac{\mu^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} \mu^2 (kT)^2 \right] = \frac{\mu^4}{4(\hbar\omega)^3} \left[1 + 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

Ahora hay que reemplazar aquí la expresión (18), notando que en el término que ya es proporcional a T^2 en la ec. (19) debe usarse la aproximación de orden cero para el potencial químico. Así obtenemos

$$E(T) \approx \frac{\epsilon_F^4}{4(\hbar\omega)^3} \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]^4 \left[1 + 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

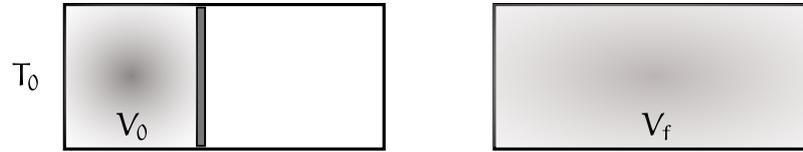
Para ser consistentes con el orden de la aproximación debemos expandir hasta orden T^2 ,

$$E(T) \approx \frac{\epsilon_F^4}{4(\hbar\omega)^3} \left[1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right] = \frac{3}{4} N \epsilon_F \left[1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (21)$$

Al escribir la última igualdad hemos vuelto a usar el resultado (5). El calor específico es entonces

$$\frac{C(T)}{kN} \approx \frac{\pi^2 kT}{\epsilon_F}. \quad (22)$$

■ **Problema 2.** N bosones de espín cero y masa m ocupan un volumen V_0 dentro de un cilindro aislado térmicamente. Inicialmente el gas está a temperatura T_0 . Una fracción $x_0 > 0$ de las partículas está en la fase condensada. Se remueve el tabique, el gas se expande libremente y alcanza un nuevo equilibrio, ocupando el volumen V_f .



- Escribir la ecuación que relaciona m , x_0 , T_0 , V_0 y N .
- Asumiendo que en el estado final aún hay fase condensada, ¿cuánto vale la temperatura final T_f ? El resultado debe escribirse únicamente en términos de V_0 , V_f y T_0 .
- ¿Cuál es el valor máximo del volumen final, V_{\max} , tal que si $V_f \geq V_{\max}$ entonces en el estado final no hay condensado? V_{\max} debe escribirse sólo en términos de V_0 y x_0 .
- Para $V_f \leq V_{\max}$, ¿cuál es la fracción final x_f de partículas en la fase condensada? x_f debe quedar escrita únicamente en términos de V_f y V_{\max} .

Solución. Inicialmente es $z = 1$, debido a que existe una fracción no nula del gas en la fase condensada. Luego de remover el tabique, el gas alcanza un nuevo estado de equilibrio, con una fugacidad z_f y una temperatura T_f . Puesto que la densidad disminuye, es razonable esperar que la fracción de partículas en el condensado también disminuya. La temperatura y fugacidad finales deben dar como resultado el mismo número de partículas y la misma energía que en el estado inicial. Si la hipótesis es que en el estado final sigue habiendo condensado, debe ser $z_f = 1$. La cuestión es calcular T_f y ver cuál es el valor de V_f que hace que la fracción de partículas en la fase condensada tienda a 0.

La fracción de partículas en la fase normal del gas es, en general,

$$\frac{N_e}{N} = \frac{V}{N\lambda^3} g_{3/2}(z). \quad (23)$$

Cuando hay condensado, $z = 1$ y la fracción en la fase normal vale

$$\frac{N_e}{N} = \frac{V}{N\lambda^3} g_{3/2}(1) = \frac{V}{N\lambda^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (24)$$

Según los datos del problema esta fracción es igual a $1 - x_0$, por lo tanto

$$\frac{V_0}{N\lambda_0^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - x_0. \quad (25)$$

La energía de un gas de bosones con $z = 1$ es

$$E = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{p^2/2m}{e^{\beta p^2/2m} - 1} = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{5/2} \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{e^x - 1}. \quad (26)$$

La última integral es $\Gamma(\frac{5}{2}) g_{5/2}(1) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \zeta(\frac{5}{2})$. Lo único que nos interesa aquí es la dependencia en T y en V . Agrupando todas las constantes en una sola, queda

$$E = \alpha VT^{5/2}. \quad (27)$$

Que la energía se conserve significa que el producto $VT^{5/2}$ toma el mismo valor en el estado inicial y en el estado final. Si en el estado inicial el volumen es V_0 y la temperatura T_0 , en el estado final la temperatura será

$$T_f = T_0 \left(\frac{V_0}{V_f} \right)^{2/5}. \quad (28)$$

Puesto que $V_f > V_0$, la temperatura disminuye: si la fracción condensada decrece, esto se explica por el hecho de que la energía cinética debe repartirse entre más partículas y, por lo tanto, su promedio disminuye.

En el estado final, la fracción de partículas en la fase normal es $\frac{V_f}{N\lambda_f^3} \zeta(\frac{3}{2})$. Para que en el estado final siga habiendo condensado debe ser

$$\frac{V_f}{N\lambda_f^3} \zeta(\frac{3}{2}) < 1. \quad (29)$$

La ec. (28) implica

$$\lambda_f = \lambda_0 \left(\frac{V_f}{V_0} \right)^{3/5}. \quad (30)$$

Luego,

$$\frac{V_f}{N\lambda_f^3} \zeta(\frac{3}{2}) = \frac{V_f}{N\lambda_0^3} \zeta(\frac{3}{2}) \left(\frac{V_0}{V_f} \right)^{3/5} = \frac{V_0}{N\lambda_0^3} \zeta(\frac{3}{2}) \left(\frac{V_f}{V_0} \right)^{2/5}. \quad (31)$$

Pero entonces, de acuerdo con la ec. (25), resulta

$$\frac{V_f}{N\lambda_f^3} \zeta(\frac{3}{2}) = (1 - x_0) \left(\frac{V_f}{V_0} \right)^{2/5}. \quad (32)$$

Vemos entonces que en el estado final la fracción normal es mayor que en el estado inicial: como habíamos anticipado, la disminución de la densidad domina sobre la disminución de la temperatura. Así, para que siga habiendo condensado, debe ocurrir que

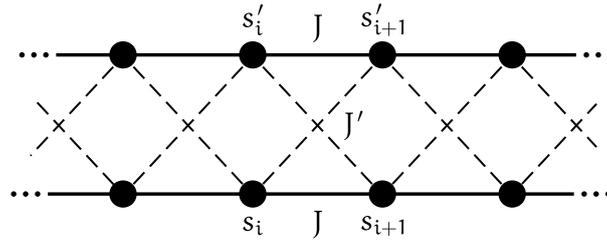
$$(1 - x_0) \left(\frac{V_f}{V_0} \right)^{2/5} < 1 \quad \Rightarrow \quad V_f < \frac{V_0}{(1 - x_0)^{5/2}} \equiv V_{\max}. \quad (33)$$

La fracción de partículas en la fase condensada es, por otro lado,

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{V_f}{N\lambda_f^3} \zeta(\frac{3}{2}) = 1 - \left(\frac{V_f}{V_{\max}} \right)^{2/5}. \quad (34)$$

■ **Problema 3.** Una cadena de Ising está formada por dos líneas de N espines. La cadena es cerrada y N es par. Hay dos clases de acoplamientos. Un acoplamiento entre primeros vecinos de cada línea, de magnitud J , y un acoplamiento de cuatro vértices, de magnitud J' . Es decir, en la energía de interacción aparecen dos clases de términos: $-J(s_i s_{i+1} + s'_i s'_{i+1})$, y $-J' s_i s'_i s_{i+1} s'_{i+1}$. No hay campo externo. La temperatura es $1/k\beta$.

Definiendo los parámetros $\chi = e^{2\beta J}$ y $w = e^{\beta J'}$, considere la transformación de grupo de renormalización que elimina los espines pares. Encuentre las ecuaciones de transformación para χ y w .



Solución. Usaremos el método de la matriz de transferencia. La función de partición es

$$Z = \sum_{s_1, s'_1, s_2, s'_2, \dots} e^{-\beta H(\{s\}, \{s'\})} \quad (35)$$

$$= \sum_{s_1, s'_1, s_2, s'_2, \dots} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3 + \dots)} e^{K(s'_1 s'_2 + s'_2 s'_3 + \dots)} e^{K'(s_1 s'_1 s_2 s'_2 + s_2 s'_2 s_3 s'_3 + \dots)}, \quad (36)$$

donde $K = \beta J$ y $K' = \beta J'$. Reagrupando factores según el encadenamiento de los espines, queda

$$Z = \sum_{s_1, s'_1, s_2, s'_2, \dots} \left[e^{K(s_1 s_2 + s'_1 s'_2)} e^{K' s_1 s'_1 s_2 s'_2} \right] \left[e^{K(s_2 s_3 + s'_2 s'_3)} e^{K' s_2 s'_2 s_3 s'_3} \right] \dots \quad (37)$$

Llamando genéricamente $e_i = \{s_i, s'_i\}$ al estado del eslabón i -ésimo, formado por los espines s_i y s'_i , la función de partición puede escribirse en términos de una matriz de transferencia \mathbb{T} con elementos

$$T_{e_i e_j}(\chi, w) = \chi^{\frac{s_i s_j + s'_i s'_j}{2}} w^{s_i s'_i s_j s'_j}, \quad (38)$$

donde $\chi = e^{2K}$ y $w = e^{K'}$. Más abajo se verá la conveniencia de estas definiciones. En definitiva,

$$Z = \sum_{e_1, e_2, \dots} T_{e_1 e_2}(\chi, w) T_{e_2 e_3}(\chi, w) T_{e_3 e_4}(\chi, w) T_{e_4 e_5}(\chi, w) \dots \quad (39)$$

Enumerando los estados e_i de acuerdo al siguiente esquema

$$e_1 = \{1, 1\}, \quad e_2 = \{1, -1\}, \quad e_3 = \{-1, 1\}, \quad e_4 = \{-1, -1\}, \quad (40)$$

la matriz de transferencia se escribe como

$$\mathbb{T}(x, w) = \begin{pmatrix} xw & \frac{1}{w} & \frac{1}{w} & \frac{w}{x} \\ \frac{1}{w} & xw & \frac{w}{x} & \frac{1}{w} \\ \frac{1}{w} & \frac{w}{x} & xw & \frac{1}{w} \\ \frac{w}{x} & \frac{1}{w} & \frac{1}{w} & xw \end{pmatrix}. \quad (41)$$

La transformación de grupo de renormalización, en lo que se refiere a la eliminación de grados de libertad, consiste en la siguiente identificación:

$$Z = \sum_{e_1, e_3, \dots} \left[\sum_{e_2, e_4, \dots} e^{-\beta H(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots)} \right] = C \sum_{e_1, e_3, \dots} e^{-\beta H_{\text{ef}}(e_1, e_3, e_5, \dots)}. \quad (42)$$

El objetivo es entonces encontrar el hamiltoniano efectivo H_{ef} . La eliminación de los espines pares es equivalente a sumar de manera explícita sobre los estados e_2, e_4 , etc. en la ec. (39). Así resulta

$$Z = \sum_{e_1, e_3, \dots} (\mathbb{T}^2)_{e_1 e_3}(x, w) (\mathbb{T}^2)_{e_3 e_5}(x, w) (\mathbb{T}^2)_{e_5 e_7}(x, w) \dots \quad (43)$$

Debemos mostrar que $(\mathbb{T}^2)_{e_i e_j}(x, w) = c(x, w) T_{e_i e_j}(x', w')$, para ciertos x' y w' , de manera que

$$Z = c(x, w)^{N/2} \sum_{e_1, e_3, \dots} T_{e_1 e_3}(x', w') T_{e_3 e_5}(x', w') T_{e_5 e_7}(x', w') \dots \quad (44)$$

Lo que significa que la teoría efectiva para los eslabones impares estará definida por acoplamientos de la misma clase que los de la cadena original, pero renormalizados.

Debido a la simetría de la matriz, el cálculo de \mathbb{T}^2 requiere evaluar únicamente tres elementos distintos:

$$\mathbb{T}^2(x, w) = \begin{pmatrix} (xw)^2 + \frac{2}{w^2} + \frac{w^2}{x^2} & 2x + \frac{2}{x} & 2x + \frac{2}{x} & 2w^2 + \frac{2}{w^2} \\ 2x + \frac{2}{x} & (xw)^2 + \frac{2}{w^2} + \frac{w^2}{x^2} & 2w^2 + \frac{2}{w^2} & 2x + \frac{2}{x} \\ 2x + \frac{2}{x} & 2w^2 + \frac{2}{w^2} & (xw)^2 + \frac{2}{w^2} + \frac{w^2}{x^2} & 2x + \frac{2}{x} \\ 2w^2 + \frac{2}{w^2} & 2x + \frac{2}{x} & 2x + \frac{2}{x} & (xw)^2 + \frac{2}{w^2} + \frac{w^2}{x^2} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Una primera cosa para notar es que \mathbb{T}^2 tiene la misma estructura que \mathbb{T} ,

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} A & B & B & C \\ B & A & C & B \\ B & C & A & B \\ C & B & B & A \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}^2 = \begin{pmatrix} A' & B' & B' & C' \\ B' & A' & C' & B' \\ B' & C' & A' & B' \\ C' & B' & B' & A' \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Si esto no fuera así, el hamiltoniano efectivo pertenecería a una clase más general que la del hamiltoniano de partida. Sería necesario agregar otros tipos de interacciones para que la transformación fuese cerrada.

Lo que debemos hacer es igualar $\mathbb{T}^2(x, w)$ con $c(x, y)\mathbb{T}(x', w')$, para una constante c y valores adecuados de x' y w' . Es decir, la matriz (45) debe poder escribirse como

$$\mathbb{T}^2(x', w') = c(x, y) \begin{pmatrix} x'w' & \frac{1}{w'} & \frac{1}{w'} & \frac{w'}{x'} \\ \frac{1}{w'} & x'w' & \frac{w'}{x'} & \frac{1}{w'} \\ \frac{1}{w'} & \frac{w'}{x'} & x'w' & \frac{1}{w'} \\ \frac{w'}{x'} & \frac{1}{w'} & \frac{1}{w'} & x'w' \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Las incógnitas son x' , w' y, de manera secundaria, c . Debido a que en \mathbb{T}^2 sólo hay tres elementos independientes, tendremos tantas ecuaciones como incógnitas. Lo más sencillo es formar cocientes entre los elementos de \mathbb{T}^2 , de esa forma se cancela la constante c y podemos leer directamente los valores de x' y w' . Por ejemplo,

$$x'^2 = \frac{(\mathbb{T}^2)_{11}}{(\mathbb{T}^2)_{14}}, \quad (48)$$

$$w'^4 = \frac{(\mathbb{T}^2)_{11}(\mathbb{T}^2)_{14}}{(\mathbb{T}^2_{12})^2}. \quad (49)$$

Explícitamente,

$$x'^2 = \frac{x^4w^4 + 2x^2 + w^4}{2x^2(1 + w^4)}, \quad (50)$$

$$w'^4 = \frac{(x^4w^4 + 2x^2 + w^4)(1 + w^4)}{2w^4(1 + x^2)^2}. \quad (51)$$

Si definimos parámetros $u = x^2$ y $v = w^4$, las ecuaciones de transformación toman una forma más compacta,

$$u' = \frac{u^2v + 2u + v}{2u(1 + v)}, \quad (52)$$

$$v' = \frac{(u^2v + 2u + v)(1 + v)}{2v(1 + u)^2}. \quad (53)$$