Teoría Avanzada de la Termodinámica – 2do cuatrimestre de 2020

Guía 1: *Probabilidades*

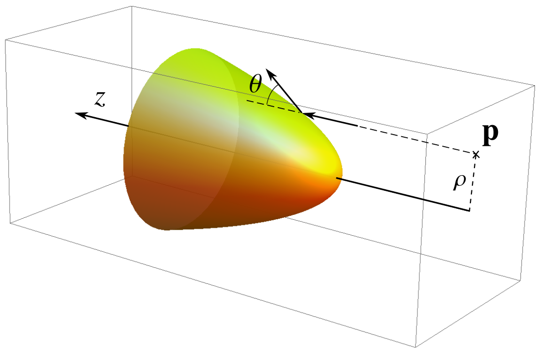
1. **Dispersión de partículas.** Considere un haz de partículas independientes que se mueven en la dirección $\hat{z}$. El haz tiene simetría cilíndrica respecto del eje z. Una partícula del haz se mueve, entonces, según una recta que atraviesa al plano xy en el punto $\mathbf{p}$. Este punto no se conoce de antemano. La densidad de probabilidad de que las coordenadas polares de $\mathbf{p}$ sean ρ y ϕ es $I(\rho)$, independiente de ϕ. De modo que

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} d\rho\, I(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} d\rho\, I(\rho) = 1.$$

   a) ¿Cuál es la densidad de probabilidad marginal $p(\rho)$ asociada a ρ?

   La partícula es dispersada elásticamente por un paraboloide de revolución dado por $z(\rho) = \alpha\rho^2$, como muestra la figura.

   b) ¿Cuál es la densidad de probabilidad $I_{\rm d}(\theta)$ de que el ángulo con el que la partícula es dispersada sea θ?



2. (Reichl, §4.) Las variables aleatorias X e Y son independientes, con distribución gaussiana centrada en el cero y desviación estándar $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. Encuentre la función característica para la variable $Z = X^2 + Y^2$ y calcule sus tres primeros momentos.

3. (Reichl, §4.) Las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_N$ son independientes y tienen la misma densidad $p_{X_i}(x) \equiv p(x)$. La suma $S = X_1 + \cdots + X_N$ puede representar, por ejemplo, el desplazamiento de una caminata al azar luego de N pasos. Encuentre la densidad de S si:

   a) Los desplazamientos elementales son discretos, $p(x) = p\delta(x-a) + q\delta(x+a)$, con $q = 1 - p$.

   b) Los desplazamientos elementales X_i son gaussianos, $p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-(x-a)^2/(2\sigma^2)\right]$.

   c) Los desplazamientos elementales siguen una distribución de Cauchy, $p(x) = a/[\pi(a^2 + x^2)]$.

   Sugerencia: calcule la función característica de S o use el desarrollo de Fourier de la delta de Dirac $\delta(s - x_1 - \cdots - x_N)$.

4. Sea X una variable aleatoria continua con distribución acumulativa $F(x)$, es decir, $\text{Prob}(X \leq x) = F(x)$. Demuestre que X puede generarse a partir de una variable aleatoria R con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$, definiendo $X = F^{-1}(R)$.

5. Este problema es el inverso del anterior: igual que antes sea $F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$. Encuentre la función de distribución acumulativa y la densidad para la variable Y definida como $Y = F(X)$.

6. Este problema combina los dos anteriores. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con distribuciones acumulativas F_X y F_Y, respectivamente. Encuentre la función f monótona tal que $Y = f(X)$.

7. **Direcciones aleatorias** (Feller § I.10.) En $\mathbb{R}^3$ la dirección de un vector unitario $\hat{\Omega}$ puede darse mediante los ángulos esféricos φ y θ, con $\varphi \in [0, 2\pi]$ y $\theta \in [0, \pi]$. Estos vectores pueden representar, por ejemplo, estrellas en el cielo o la orientación de los planos de galaxias espirales en un cúmulo.

   a) ¿Cuál es la densidad de probabilidad p en la variables θ y φ que corresponde a una distribución isótropa de versores aleatorios? ¿Seguro? Recuerde que si la distribución es isótropa, la probabilidad de que el vector unitario apunte en la dirección $\hat{\Omega}$ dentro de un ángulo sólido $d\Omega$ es independiente de $\hat{\Omega}$.

   b) En esféricas, suele ser más cómodo trabajar con $\xi = \cos\theta$. Encuentre la densidad $f(\varphi, \xi)$ en esas variables.

   c) Demuestre que la densidad de probabilidad para la proyección de $\hat{\Omega}$ sobre cualquier eje fijo es uniforme en $[-1, 1]$.

   d) Esta uniformidad de la proyección sobre un eje no tiene mayor relación con la uniformidad de la distribución de $\hat{\Omega}$, sino con la dimensionalidad del espacio. Para ver que no vale en otras dimensiones, encuentre la densidad de la proyección sobre un eje de un vector uniformemente distribuido en un círculo en $\mathbb{R}^2$.

   e) Para hacer en la computadora: como chequeo de lo anterior y como aplicación del problema 4, use un generador de números aleatorios, uniforme en $[0, 1]$, para simular una muestra de n direcciones aleatorias uniformemente distribuidas en la esfera. Hágalo en términos de las variables φ y θ, es decir, genere valores al azar de φ y de θ de acuerdo a la densidad $p(\varphi, \theta)$ calculada antes. Grafique varias de estas muestras. Grafique también un histograma para las proyecciones sobre alguno de los ejes; tome $n \sim 10^4$ y compruebe cualitativamente que la distribución es uniforme en $[-1, 1]$.

8. En este problema, pensado para hacer en la computadora, vamos a comprobar la ley de grandes números y el teorema central del límite con el experimento aleatorio más sencillo que existe: el de lanzar una moneda. Sea f la frecuencia relativa con la que sale cara después de lanzar la moneda N veces (es decir, f es el número de veces que sale cara dividido N). Usando un generador de números aleatorios, simule muchas veces el experimento de lanzar la moneda N veces y obtenga un histograma para f. Compruebe que, a medida que N aumenta, el histograma se estrecha cada vez más alrededor de $f = 1/2$, como predice la ley de grandes números. Compare el histograma con la distribución gaussiana que el teorema central del límite predice para f, y compruebe que tienden a coincidir cuando N es lo bastante grande.

Referencias:

Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol II.
Reichl, *A modern course in statistical physics*. 2da Ed.